Tafel I.

λ	I_λ^0	a	b	c	I_λ^1	a	b	c
2,00	−0,397150	+ 6604	+1903	−26	− 0,066043	−38064	+ 786	+49
2,05	0,388670	10327	1817	31	0,103273	36348	929	46
2,10	0,376557	13865	1718	35	0,138647	34354	1063	43
2,15	0,361011	17190	1605	39	0,171897	32103	1186	38
2,20	0,342257	20277	1481	43	0,202776	29617	1298	34
2,25	0,320543	23106	1346	47	0,231061	26920	1397	31
2,30	0,296138	25655	1202	49	0,256553	24037	1483	26
2,35	0,269331	27908	1050	52	0,279081	20995	1556	22
2,40	0,240425	29850	891	54	0,298500	17824	1613	17
2,45	0,209738	31469	728	55	0,314695	14552	1656	12
2,50	0,177597	32758	560	56	0,327579	11208	1685	7
2,55	0,144335	33710	391	56	0,337097	7824	1697	+ 2
2,60	0,110290	34322	221	56	0,343223	4429	1695	− 3
2,65	0,075803	34596	+ 53	56	0,345961	− 1053	1678	8
2,70	0,041210	34534	− 114	55	0,345345	+ 2274	1646	13
2,75	−0,006844	34144	276	53	0,341438	5524	1601	18
2,80	+0,026971	33433	433	51	0,334333	8667	1541	22
2,85	0,059920	32415	584	49	0,324148	11679	1468	26
2,90	0,091703	31103	727	46	0,311028	14533	1384	30
2,95	0,122033	29514	860	43	0,295143	17206	1288	34
3,00	0,150645	27668	984	39	0,276684	19676	1181	37
3,05	0,177291	25586	1096	35	0,255865	21924	1065	40
3,10	0,201747	23292	1197	31	0,232917	23931	941	42
3,15	0,223812	20809	1284	27	0,208087	25684	810	44
3,20	0,243311	18164	1358	22	0,181638	27169	674	46
3,25	0,260095	15384	1419	18	0,153841	28376	533	47
3,30	0,274043	12498	1465	13	0,124980	29298	388	48
3,35	0,285065	9534	1497	8	0,095342	29929	243	49
3,40	0,293096	6522	1513	− 3	0,065219	30269	+ 96	49
3,45	0,298102	3490	1516	+ 2	0,034902	30316	− 49	48
3,50	0,300079	+ 468	1504	6	− 0,004683	30075	192	47
3,55	0,299051	− 2515	1478	11	+ 0,025153	29551	331	46
3,60	0,295071	5433	1438	15	0,054327	28753	466	44
3,65	0,288217	8257	1384	20	0,082571	27691	595	42
3,70	0,278596	10962	1319	24	0,109625	26378	716	39
3,75	0,266340	13525	1242	28	0,135248	24830	830	36
3,80	0,251602	15921	1153	31	0,159214	23065	934	33
3,85	0,234559	18131	1055	34	0,181313	21101	1028	30
3,90	0,215408	20136	948	37	0,201357	18959	1112	26
3,95	0,194362	21918	833	39	0,219179	16662	1184	22

SCHRIFTEN DER STERNWARTE SEEBERG.

ERMITTELUNG
DER
ABSOLUTEN STÖRUNGEN
IN ELLIPSEN
VON
BELIEBIGER EXCENTRICITÄT UND NEIGUNG,

VON

P. A. HANSEN,

DIRECTOR DER STERNWARTE SEEBERG.

ERSTER THEIL,

WELCHER ALS BEISPIEL DIE BERECHNUNG DER ABSOLUTEN, VOM SATURN ERZEUGTEN STÖRUNGEN DES ENCKESCHEN KOMETEN ENTHÄLT.

GOTHA, 1843.

IN COMMISSION BEI CARL GLÄSER.

ZU HABEN IN PARIS BEI BROCKHAUS UND AVENARIUS, IN LONDON BEI ASHER & COMP.,
IN PETERSBURG BEI GRÄFF'S ERBEN, IN AMSTERDAM BEI JOHANNES MÜLLER,
IN MAILAND UND WIEN BEI TENDLER & SCHÄFFER.

DEM

HERRN CONFERENZRATH UND PROFESSOR DER ASTRONOMIE

H. C. SCHUMACHER,

COMMANDEUR VOM DANNEBROGE UND DANNEBROGSMANN, RITTER DES KÖNIGL. PREUSSISCHEN ROTHEN ADLERORDENS ZWEITER CLASSE, DES KAISERL. RUSSISCHEN St. ANNEN- UND STANISLAUSORDENS ZWEITER CLASSE, DES KÖNIGL. SCHWEDISCHEN NORDSTERNORDENS UND DER EHRENLEGION, MITGLIEDE DER KÖNIGL. GESELLSCHAFTEN DER WISSENSCHAFTEN IN COPENHAGEN, LONDON, EDINBURGH, STOCKHOLM, GÖTTINGEN UND UPSALA, DER KÖNIGL. ASTRONOM. GESELLSCHAFT IN LONDON, DER AMERICANISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN PHILADELPHIA, DER PHYSIOGRAPHISCHEN GESELLSCHAFT IN LUND UND DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN DANZIG, EHRENMITGLIEDE DER KÖNIGL. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN DUBLIN, DER SOCIETY OF USEFUL ARTS IN EDINBURGH, DER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT IN HAMBURG UND DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN ROSTOCK, CORRESPONDENTEN DES FRANZÖSISCHEN INSTITUTS, DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN St. PETERSBURG, DER KÖNIGL. GESELLSCHAFTEN DER WISSENSCHAFTEN IN BERLIN, BRÜSSEL, NEAPEL, PADUA, PALERMO UND TURIN.

Sie, hochverehrtester Freund! leiteten meine Schritte, nachdem ich, früher Ihnen unbekannt, vor nunmehr drei und zwanzig Jahren mich an Sie gewandt, und Ihnen meine Absicht, mich der Astronomie zu widmen, zu erkennen gegeben hatte. Sie machten mir es nicht nur möglich, sondern leicht auf dem Wege, den ich eingeschlagen hatte, fortzuschreiten, und haben nicht aufgehört mir die sprechendsten Beweise Ihres Wohlwollens zu geben. Sie wurden mir der bewährte Freund, dem ich mich in jeder Angelegenheit nahen kann, und von dem ich des treugemeinten und einsichtsvollsten Rathes gewifs bin. Ich bin Ihnen um so mehr dafür verpflichtet, da ich nie Gelegenheit haben kann, das was ich Ihnen danke, mit Gleichem zu

vergelten. Um aber durch ein äufseres Zeichen anzudeuten, wie sehr ich von Erkenntlichkeit und Hochachtung gegen Sie durchdrungen bin, habe ich mir erlaubt Ihren Namen dieser Schrift vorzusetzen, die Ihnen gehört wie keinem andern. Denn wenn, wie ich hoffe, aus meinen Arbeiten ein Beitrag zur Förderung unserer Wissenschaft erwächst, so sind Sie als erster Urheber davon zu betrachten.

P. A. Hansen.

Inhalt.

Einleitung.

Die theoretische Bestimmung der Oerter der älteren Planeten und der Satelliten geschieht bekanntlich durch Ausdrücke, welche die Polarcoordinaten derselben in Function der Zeit geben. Wenn diese Ausdrücke ein für allemal mit hinreichender Schärfe berechnet worden sind, so erfordert die Ermittelung eines Orts des Planeten oder Satelliten keine weitere Arbeit wie die Substitution des speciellen Werthes der Zeit in diese Ausdrücke, welche Arbeit überdies noch durch die Anwendung von Tafeln, die zu diesem Zwecke aus jenen Ausdrücken berechnet worden sind, wesentlich erleichtert wird. Die Vorschriften, welche zur Entwickelung und Berechnung jener Ausdrücke der Polarcoordinaten in Function der Zeit dienen, sind gegenwärtig so vollständig bekannt gemacht, daſs man durch ihre Anwendung jene Ausdrücke der Coordinaten in Function der Zeit mit beliebiger Schärfe berechnen kann. In Bezug auf diese Himmelskörper kann man daher sagen, daſs das Problem der Bahnbestimmung derselben in ausgedehnterem Sinne gelöst ist. Anders verhält es sich mit den neuen Planeten und den Kometen. Es giebt bis jetzt keine mathematischen Vorschriften, Regeln oder Formeln, nach welchen man ihre heliocentrischen Coordinaten oder elliptischen Elemente in Function der unbestimmt gelassenen Zeit (wenigstens mit Nutzen) ausdrücken könnte, oder auszudrücken versucht hätte *). Das Verfahren, dessen man sich bedient,

*) Es ist wenigstens nichts darüber zur Oeffentlichkeit gelangt.

um die Oerter dieser Himmelskörper zu bestimmen, ist ein ganz anderes. Man wendet hiezu die mathematischen Ausdrücke an, welche die Veränderungen ergeben, die die elliptischen Elemente durch die Anziehung der Planeten während eines sehr kurzen Zeitraumes erleiden. Nachdem man durch Substitution der betreffenden numerischen Werthe in diese Ausdrücke die Aenderungen der elliptischen Elemente während einer hinreichend grofsen Anzahl kleiner auf einander folgenden Zeiträume berechnet hat, ermittelt man durch die Art der Summation, die unter dem Namen der mechanischen Quadraturen bekannt ist, die Aenderungen der Elemente, die irgend einer, innerhalb des ganzen Zeitintervalls, für welches man solchergestalt die Rechnungen ausgeführt hat, liegenden Zeit zukommen, und kann hierauf die Coordinaten des Planeten oder Kometen für diese Zeit berechnen.

Man kann dieses Verfahren nicht als ein solches betrachten, welches für die genannten Himmelskörper durch theoretische Gründe als überwiegend und vorzüglicher wie jenes erkannt sey; es wird blos deswegen angewandt, weil kein Verfahren bis jetzt vorhanden ist, durch welches man die Coordinaten der neuen Planeten und der Kometen — der grofsen Excentricitäten und Neigungen ihrer Bahnen wegen — in Function der unbestimmt gelassenen Zeit hätte ausdrücken können. Es kommen sogar in astronomischen und mathematischen Abhandlungen Stellen vor, aus welchen hervorzugehen scheint, dafs die Lösung dieses Problems von diesem oder jenem für unmöglich gehalten worden ist.

Sehr wünschenswerth ist jedenfalls die Lösung dieses Problems, da das Verfahren, welches man gegenwärtig bei den neuen Planeten und den Kometen befolgt, jenem gegenüber wesentliche Unvollkommenheiten und Nachtheile mit sich bringt, so sehr es auch an sich durch die Bemühungen der ausgezeichnetesten Geometer dieses Jahrhunderts vervollkommnet worden ist. Eine der wesentlichsten Unvollkommenheiten desselben ist, dafs man nie ohne vorgängige lange, und von Periode zu Periode zu wiederholende Rechnung den Ort des betreffenden Himmelskörpers zu bestimmen im Stande ist, und dafs man hiebei, auch wenn in einer oder mehreren Perioden keine Beobachtungen vorhanden wären, dieselben bei der Berechnung doch nicht über-

gehen darf, indem man irgend zwei oder mehrere entfernt liegende Beobachtungen nur durch Ausdehnung der Rechnung auf alle, von der einen zur andern sich erstreckenden Perioden mit einander in Verbindung setzen kann. Wären dagegen die Coordinaten desselben Himmelskörpers in Function der unbestimmt gelassenen Zeit ausgedrückt, so könnte man Beobachtungen, sie mögen einander nahe seyn oder entfernt von einander liegen, durch eine im Vergleich mit jener sehr geringen Arbeit mit einander verbinden. Zwar kostet die Berechnung der erwähnten Ausdrücke der Coordinaten in Function der Zeit eine im Voraus zu vollführende Arbeit, aber diese wird ein für alle Mal abgemacht, während jene von Periode zu Periode zu wiederholende Rechnung nie ein Ende erreicht. Ferner kann man durch dieses Verfahren, wenn man es von der practischen Seite betrachtet, zwei oder mehrere sehr weit von einander liegende Beobachtungen nicht mit solcher Schärfe mit einander verbinden, wie dies bei nahe an einander liegenden der Fall ist. Denn je weiter die zu verbindenden Beobachtungen aus einander liegen, aus desto mehr Gliedern bestehen die Aggregate, die die elliptischen Elemente des einen Zeitpunctes mit denen des andern verbinden. Da nun die letzte Stelle, oder die letzten Stellen der einzelnen Glieder aus bekannten Ursachen unrichtig sind, so müssen um so mehr die Aggregate unrichtig werden, aus je mehr Gliedern sie bestehen. Theoretisch betrachtet würde man in jedem Falle dieser so entstehenden Ungenauigkeit dadurch ausweichen können, daſs man in den einzelnen Gliedern die zu berechnende Anzahl von Decimalstellen hinreichend vergröſserte, aber practisch hört dieses Mittel bald auf zureichend zu seyn, weil die Rechnungen dadurch bald zu einer unbesiegbaren Länge anwachsen würden. Denn erstens müſste man für die Ausführung derselben sich Logarithmen- und trigonometrischer Tafeln von mehr Decimalstellen bedienen; zweitens müſste man die Zeitintervalle kürzer machen, wodurch schon die Zahl der Glieder, aus welchen die genannten Aggregate bestehen, wieder vermehrt würde, eine Vermehrung indeſs, die nicht in vollem Maaſse auf die Ungenauigkeit der Aggregate Einfluſs hat, weil durch Verkleinerung des Zeitintervalls auch der Factor, welcher das Differential der Zeit bedeutet, und womit jedes Glied multiplicirt werden muſs, kleiner

1 *

wird; drittens müfste man aber auch der Glieder wegen, die von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte entstehen, mit den in der Rechnung anzuwendenden elliptischen Elementen häufiger wechseln. In den Fällen, wo die Störungen überhaupt grofs sind, mufs bei dem Wechsel der der Rechnung zu Grunde liegenden elliptischen Elemente die gröfste Consequenz befolgt werden, denn die in den verschiedenen Theilen, aus denen jedes Glied besteht, sich erzeugenden, von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte entstehenden Glieder sind oft von der Beschaffenheit, dafs sie sich in den Aggregaten zum gröfseren Theile aufheben; ist man nun beim Wechsel der der Rechnung zu Grunde liegenden Elemente nicht strenge consequent verfahren, so kann sich ereignen, dafs im Resultate die genannten Theile sich nicht gehörig gegen einander aufheben, und dafs mithin dasselbe nicht ganz richtig wird. Das einzige Mittel diesem Umstande vorzubeugen ist, dafs man für jeden Zeitpunkt, in welchem man mit den der Rechnung zu Grunde gelegten Elementen wechselt, einige Differentiale der Elemente doppelt, nemlich einmal mit den bis dahin angewandten, und einmal mit den von nun an anzuwendenden Elementen berechnet und untersucht, ob die hiedurch sich im Resultat ergebenden Unterschiede so klein sind, dafs man sie als nicht vorhanden betrachten könne. Durch diese doppelte Rechnung wird aber die Arbeit um so mehr vermehrt, je häufiger man mit den Elementen zu wechseln sich genöthigt sieht.

Durch alle diese Umstände wird bewirkt, dafs es bei dem in Rede stehenden Verfahren practisch unmöglich wird, zwei sehr weit von einander abstehende Epochen mit hinreichender Genauigkeit mit einander zu verbinden. Dahingegen bekommt man durch jenes Verfahren, die periodischen Störungsglieder anlangend, den Ort des Himmelskörpers mit gleicher Genauigkeit, wie weit auch die Zeit, für welche man den Ort berechnet, von der Gegenwart, oder der festgesetzten Epoche, entfernt ist. In Bezug auf die mit der Zeit selbst multiplicirten Glieder, oder die sogenannten Säcularänderungen, wächst nun zwar hier auch die Unsicherheit mit der Zeit, aber in weit geringerem Maafse wie bei dem andern Verfahren. Man kann durch verhältnifsmäfsig geringe Arbeit die Säcularänderungen z. B. so genau be-

rechnen, daſs der Fehler im Ort des Himmelskörpers innerhalb 1000 Jahre vor und nach der Epoche keine Secunde erreicht, und mithin die Gesammtsumme der Störungen innerhalb dieses Zeitraums bis auf diese Gröſse theoretisch richtig ist. Man würde gewiſs bei jenem Verfahren während eines weit kleineren Zeitraums eine gröſsere Unrichtigkeit nicht vermeiden können.

Eines Umstandes ist noch zu erwähnen. Bei der Berechnung der Störungen durch mechanische Quadraturen erscheinen die Störungen des elliptischen Elements, welches die Epoche der mittleren Länge oder mittleren Anomalie bedeutet, häufig weit gröſser wie sie in der That sind. Dieser Umstand hat seinen Grund darin, daſs sich bei der doppelten Integration, welche die Berechnung der Störungen dieses Elements erfordert, ein der Zeit proportionales Glied erzeugt, dessen numerischer Werth sich durch die Rechnung selbst und ohne Zuthun des Rechners dem numerischen Werthe der periodischen Glieder einverleibt, und mit ihnen verbunden als Eine numerische Gröſse im Resultat erscheint. Dieses Glied subtrahirt sich wieder von selbst bei der Ermittelung der rein elliptischen Elemente durch die Beobachtungen von dem Werthe der mittleren Bewegung, so daſs die wahre stattfindende mittlere Bewegung des Himmelskörpers aus dem Aggregat der sogenannten rein elliptischen mittleren Bewegung, deren Störungen und den erwähnten, in den Störungen der Epoche implicite enthaltenen, der Zeit proportionalen Gliede besteht.

Wenn dieses Glied beträchtlich ist, so hat es nachtheiligen Einfluſs auf die Berechnung der Störungen, denn es verursacht gröſsere Zahlenwerthe und bewirkt damit, daſs man Logarithmen mit mehr Decimalstellen zu deren Berechnung anwenden muſs, als auſserdem erforderlich wären. Es bewirkt ferner gröſsere Veränderung in den berechneten Störungen und veranlaſst dadurch, daſs man häufiger mit den der Rechnung zu Grunde gelegten Elementen wechseln muſs, als auſserdem nöthig wäre; es verursacht mit einem Worte, daſs die von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängigen Glieder gröſser erscheinen, als sie in der That sind.

Alles dieses vereinigt sich dahin, es als wünschenswerth erscheinen zu lassen, daſs ein Verfahren gefunden würde, durch welches man die helio-

centrischen Coordinaten der kleinen Planeten und der Kometen, deren Umlaufszeit bekannt ist, in Function der unbestimmt gelassenen Zeit, wie bei den älteren Planeten und den Satelliten, ausdrücken könne.

Wie man für einzelne Punkte der Kometenbahn, in den Fällen, wo der Radius Vector des Kometen weit größer ist wie der des störenden Planeten, die Störungen von Kometen ohne Anwendung von mechanischen Quadraturen berechnen könne, hat Bessel in den Astr. Nachr. Band XIV. gezeigt, und Airy hat die Idee gehabt, die Störungen für bestimmte Portionen der Kometenbahn durch begrenzte Integrale auszudrücken. Hiedurch ist also gezeigt worden, wie man in einzelnen Punkten oder Theilen der Kometenbahn die Anwendung der Methode der mechanischen Quadraturen vermeiden kann, aber die Aufgabe: die Coordinaten des Kometen in Function der Zeit darzustellen, oder die absoluten Störungen desselben für alle Punkte seiner Bahn zu geben, ist nirgends durchgeführt worden.

Alles was für die Auflösung dieser Aufgabe bis jetzt vorhanden ist, besteht in der berühmten „*Determinatio attractionis etc.*" betitelten Abhandlung von Gauſs. In dieser giebt der Verfasser ein elegantes Verfahren, wodurch diejenigen Glieder erster Ordnung in Beziehung auf die störenden Kräfte, von welchen die Säcularänderungen abhängen, berechnet werden können, die Excentricitäten und Neigungen mögen so groſs seyn wie sie wollen, wenn nur erstere kleiner wie Eins ist, oder mit anderen Worten, einer Ellipse angehört. Wenn gleich hiemit viel gewonnen ist, so läſst sich doch nicht in Abrede stellen, daſs noch eine groſse Lücke auszufüllen übrig bleibt, denn auſser den Säcularänderungen bedarf man auch der Kenntniſs der periodischen Glieder, welche an Anzahl und oft auch an Gröſse, eben in dem Falle, worum es sich hier handelt, jene weit übertreffen. Dann muſs man auch um gewünschten Erfolg herbeiführen zu können, sowohl für diese wie für jene die Theile, die von den Quadraten und höheren Potenzen der Massen abhängen, berechnen können.

Ich bemerke hiebei, daſs man, wenn man blos eine Auflösung dieser Aufgabe verlangte, und von ihrer Benutzbarkeit absehen wollte, diese schon

durch das Verfahren, welches ich in meiner Preisschrift über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns angewandt habe, erlangen kann. Es läſst sich nemlich beweisen, daſs die dort vorkommenden, unendlichen Reihen convergiren müssen, wie groſs auch die elliptische Excentricität und die Neigung sey, und mithin das Verfahren, welches ich dort angewandt habe, ohne Abänderung auf Himmelskörper, deren Bahnen beliebige Neigungen und elliptische Excentricitäten haben, angewandt werden könne. Aber wenn diese Elemente nur einigermaaſsen groſs sind, wird die Convergenz jener Reihen sehr geringe, und man müſste eine sehr groſse Anzahl von Gliedern berechnen, um ein hinreichend genaues Resultat zu erhalten. Schon für die Juno, deren Excentricität ohngefähr $= \frac{1}{4}$ und deren Neigung gegen die Ecliptik ohngefähr 13°, oder die Pallas, deren Excentricität auch ohngefähr $= \frac{1}{4}$ und deren Neigung nahe $= 33°$ ist, würde die Anzahl der nach diesem Verfahren zu berechnenden Glieder so groſs seyn, daſs ihre Berechnung ungemein lang, und ihre nachherige Anwendung sehr mühsam und beschwerlich wäre. Für Kometen vollends, deren Excentricität, wie die des Encke'schen $= 0{,}84$, oder die des Halley'schen $= 0{,}97$, würde man auf eine so groſse Anzahl von Störungsgliedern kommen, daſs man auf deren Berechnung gänzlich verzichten müſste. Das genannte Verfahren ist daher, obwohl theoretisch möglich, practisch unbrauchbar.

Kürzlich bin ich aber auf ein Verfahren zur Berechnung der absoluten Störungen — nemlich der Störungen für die unbestimmte Zeit — von Himmelskörpern, deren Bahnen beliebige elliptische Excentricitäten und Neigungen haben, gekommen, welches einfach ist, und wenigstens in den Fällen, auf welche ich es bereits angewandt habe, auf stark convergirende Reihen führt. Ich darf annehmen, daſs es in allen Fällen so starke, oder wenigstens nahe so starke Convergenz giebt, wie die Natur der Sache zuläſst. Es ist an sich begreiflich, daſs nicht in allen Fällen die nemliche Convergenz statt finden kann. Das Verfahren zerfällt in zwei Fälle, je nachdem der Radius Vector des gestörten Körpers kleiner oder gröſser ist, wie der des störenden. Der erste Fall, mit dem ich den Anfang machen werde, ist in

Die Wahl der Coordinaten ist nunmehr nicht gleichgültig, denn es kann durch selbige der oben ausgesprochene Hauptgrundsatz verletzt werden. Es zeigt sich, dafs die Coordinaten, durch deren Einführung ich in der Mond- und Planetentheorie auf mehr convergirende Reihen, und einfachere Ausdrücke gekommen bin, in der vorliegenden Aufgabe angewandt werden müssen.

Die Integration der auf die eben bezeichnete Form gebrachten Differentiale der Störungen führt auf die Integration eines Systems von endlichen Differenzgleichungen hin. Die Integration gewisser Systeme solcher Differenzgleichungen ist schon im Allgemeinen von Laplace, Lagrange, Poisson u. a. behandelt worden, in Bezug auf die vorliegende Aufgabe mufste aber die Integration dieser Gleichungen auf unabhängige Weise ausgeführt werden. Ueberhaupt führt diese Integration theils auf Kettenbrüche, theils auf Transcendenten hin, unter welchen die bekannten, in mehreren Zweigen der Naturwissenschaften vorkommenden, mit I_{λ}^{i} bezeichneten, eine bedeutende Rolle spielen. Eine vollständige Entwickelung der Eigenschaften dieser Transcendenten ist bekanntlich noch nirgends gegeben, und auch hier wird man keine solche finden; ich habe blos diejenigen Eigenschaften derselben entwickelt, die hier benutzt werden mufsten. Merkwürdig ist, dafs die Berechnung der den oben genannten Formen zukommenden Integrationsfactoren sich auf vielerlei Arten ausführen läfst. Man wird hier für die Form $\left\{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\right\}(iu + i'g')$ drei verschiedene Arten entwickelt finden; für die Form $\left\{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\right\}(if + i'g')$, die überhaupt schwieriger zu behandeln ist wie jene, habe ich nicht weniger wie zehn verschiedene Verfahrungsarten gefunden, von welchen indefs einige practisch nicht brauchbar sind.

Ich habe nun in diesem ersten Theile dieser Schrift den Fall vorgenommen, in welchem der Radius Vector des gestörten Körpers stets kleiner ist wie der des störenden, und die Anwendung desselben durch die Berechnung der absoluten Störungen, welche der Encke'sche Komet durch den Saturn erleidet, erläutert. Im zweiten Theile werde ich den entgegengesetzten Fall vornehmen, und endlich den gemischten Fall, in welchem sich die beiden Bahnen in einander schlingen, betrachten.

§. I.

Allgemeine Betrachtungen über die Entwickelung der Störungen bei grofsen Excentricitäten und Neigungen.

1.

In der Störungstheorie überhaupt, oder in dem Problem der drei oder mehr Körper sind die Entwickelung der Störungsfunction, die Verbindung dieser Entwickelung mit zweckmäfsig gewählten Coordinaten und die Integration der dadurch erlangten unendlichen Reihen die wesentlichsten Punkte. Den ersten und dritten dieser Punkte führe ich hier anders aus, wie in meiner bisherigen, kleine Excentricitäten und Neigungen voraussetzenden Störungstheorie, den zweiten Punkt hingegen grade so wie dort.

Die Einheit dividirt durch die gegenseitige Entfernung des gestörten und des störenden Körpers ist das verwickelteste Glied der Störungsfunction; dieses werde ich zuerst vornehmen. Den gestörten Körper werde ich im Folgenden, obgleich mein Verfahren sich auch auf die Planeten, und namentlich auf die vier kleinen anwenden läfst, der Kürze wegen den „Kometen", und den störenden aus derselben Ursache schlechtweg den „Planeten" nennen. Sey nun $\varDelta$ die Entfernung des Kometen von dem Planeten zur Zeit t, r der Radius Vector des Kometen, r' der des Planeten, und H der Cosinus des Winkels, den diese beiden Radien zur Zeit t mit einander machen, dann ist

$$\frac{1}{\varDelta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'H}}$$

Wenn nicht zugleich $r = r'$ und $H = 1$ werden kann, oder mit andern Worten ausgedrückt, die beiden Bahnen solche Lage haben, dafs sie einander schneiden *), so kann diese Function immer in eine convergirende, nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der Winkel, von welchen sie abhängt, fortschreitende unendliche Reihe aufgelöst werden. Die analytischen Ausdrücke der Coefficienten dieser, alle möglichen Fälle umfassenden Reihe sind freilich gegenwärtig nicht bekannt, allein man kann die numerischen Werthe dieser Coefficienten jedenfalls durch die Methode der Quadraturen berechnen, und durch Hülfe derselben Methode die Convergenz der Reihe nachweisen.

Die analytischen Entwickelungen, die man geben kann, führen auf Reihen, deren jede einzelne nicht in allen Fällen, wo die Convergenz überhaupt möglich ist, convergirt; man mufs in denselben den Fall, wo $r > r'$, von dem, wo $r < r'$ ist, unterscheiden.

Ordnet man die Reihenentwickelung nach den Potenzen von r und r', so erhält man bekanntlich

(1) ...... $$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} + \frac{r}{r'^2} U_1 + \frac{r^2}{r'^3} U_2 + \frac{r^3}{r'^4} U_3 + \text{etc.}$$

und

(2) ...... $$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} U_1 + \frac{r'^2}{r^3} U_2 + \frac{r'^3}{r^4} U_3 + \text{etc.}$$

wo die Werthe der U_1, U_2, etc. genannten Coefficienten die folgenden sind

$$U_1 = H$$
$$U_2 = \frac{3}{2} H^2 - \frac{1}{2}$$
$$U_3 = \frac{5}{2} H^3 - \frac{3}{2} H$$
$$U_4 = \frac{5.7}{2.4} H^4 - \frac{3.5}{2.4} 2H^2 + \frac{1.3}{2.4}$$

etc. etc.

*) In diesem Falle, welcher ein Zusammenstofsen der beiden Körper bedingt, wird die Störungsfunction unendlich grofs, und die Berechnung der Störungen hört überhaupt auf. Aber nur, wenn das Zusammenstofsen wirklich eintritt, hört die Berechnung der Störungen auf; wenn blos die Lage der Bahnen diesen Fall möglich macht, er aber nicht erfolgt, dann ist die Berechnung der Störungen nicht unmöglich.

Ein interessantes Beispiel dieses Falles bietet der Biela'sche Komet und die Erde dar.

Keiner dieser Coefficienten kann größer werden wie $+1$ oder kleiner wie -1.
Wenn $H = 1$ ist, so wird

$$U_1 = 1, \; U_2 = 1, \; U_3 = 1, \; U_4 = 1, \text{ etc.}$$

Wenn $H = -1$ ist, so ergiebt sich

$$U_1 = -1, \; U_2 = 1, \; U_3 = -1, \; U_4 = 1, \text{ etc.}$$

Für alle übrigen Werthe, die H zwischen diesen, seinen Grenzen annehmen kann, sind die Coefficienten U_1, U_2, etc. alle kleiner wie 1.

2.

Die vorhandenen Sätze über die Convergenz oder Divergenz der unendlichen Reihen besagen, daſs die Reihe (1) immer convergirt, wenn $r < r'$, und die Reihe (2), wenn $r > r'$. Wenn $r = r'$ ist, dann giebt sowohl die Reihe (1) wie (2)

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\left\{1 + U_1 + U_2 + U_3 + \text{etc.}\right\} \qquad \ldots\ldots (3)$$

Diese Reihe convergirt immer, ausgenommen, wenn H seinen Grenzwerth $+1$ erreicht. Es tritt aber alsdann der im Art. 1. erwähnte Fall ein, in welchem die Störungsfunction unendlich groſs wird, und in eine convergirende, periodische Reihe nicht aufgelöst werden kann. Wenn $H = -1$ werden kann, während $r = r'$ ist, so scheint es, als ob die Convergenz der Reihe (3) auch aufhöre; dieses ist aber in der That nicht der Fall. Man muſs alsdann $\frac{1}{\Delta}$ einmal bis zu einem gewissen, durch die übrigen Umstände bedingten Gliede, dessen Index n sey, und dann wieder bis zum Gliede, dessen Index $n+1$ ist, entwickeln, und aus diesen beiden Entwickelungen das arithmetische Mittel nehmen; man muſs mit andern Worten von dem letzten in der Entwickelung aufzunehmenden Gliede nur die Hälfte nehmen. Dadurch wird bewirkt, daſs auch in dem in Rede stehenden Falle die Entwickelung von $\frac{1}{\Delta}$ convergirt.

Es ergiebt sich aus dem allen, daſs die Reihen (1), (2) und (3) alle Fälle umfassen, in welchen überhaupt die Störungsfunction in eine convergirende, periodische Reihe aufgelöst werden kann. Da aber die Entwickelungscoefficienten, die aus der Reihe (1) hervorgehen, in Bezug auf den Kometen eine andere Form haben, wie die, welche sich aus der Reihe (2) ergeben, so müssen zwei Fälle unterschieden werden, nemlich

der erste Fall $r < r'$
der zweite Fall $r > r'$

denen man auch noch einen dritten Fall, nemlich $r \lessgtr r'$ hinzufügen kann.

3.

Die Differentialquotienten von $\frac{1}{\varDelta}$ convergiren ebenfalls immer mit alleiniger Ausnahme des eben beschriebenen Falles, doch findet der Unterschied statt, dafs, wenn r und r' nicht sehr von einander verschieden sind, die Convergenz hier nicht bei dem ersten Gliede der Reihe anfängt, während dieses bei der Reihenentwickelung von $\frac{1}{\varDelta}$ immer der Fall ist.

Die Integrale

$$\int \frac{1}{\varDelta}\, dt, \quad \int \frac{d\frac{1}{\varDelta}}{dr}\, dt, \quad \int \frac{d\frac{1}{\varDelta}}{dH}\, dt$$

convergiren stärker wie die Gröfse $\frac{1}{\varDelta}$ und ihre Differentialquotienten selbst. Denn man kann ein unbegrenztes Integral immer als ein begrenztes, zwischen alle möglichen Grenzen genommenes ansehen. Wir können daher obige Integrale als die Summe aller möglichen Werthe ihrer Differentiale ansehen, nun ist aber, da die Gröfse $\frac{r^n}{r'^{n+1}} U_n$ und ihre Differentialquotienten immer kleiner sind wie $\frac{r^{n-1}}{r'^n} U_{n-1}$ und ihre Differentialquotienten, die Summe aller möglichen Werthe der erstgenannten Gröfsen im Allgemeinen noch viel mehr kleiner, wie die aller möglichen Werthe der letztgenannten.

Dieser Satz erleidet indefs zuweilen eine Ausnahme, denn wenn lange Zeit hindurch die Werthe gewisser Glieder des kleineren Differentials dasselbe Zeichen behalten, während dieses im gröfseren Differential nicht, oder nicht in gleichem Maafse statt findet, so können im Integrale aus dem kleineren Differential Glieder entstehen, die gröfser sind wie die gröfsten Glieder des Integrals aus dem gröfseren Differential. Solche durch die Integration hervorgehobenen Glieder stehen aber immer nur einzeln da, und für alle übrigen gilt der vorstehende Satz.

Man wird in der Folge sehen, dafs grade in den Fällen, wo die Convergenz in den Differentialen die geringste ist, dieselbe im Allgemeinen durch die Integration am meisten gesteigert wird.

4.

Nennen wir die Störungsfunction Ω, die Masse des Kometen m, die des Planeten m', und die der Sonne M, dann ist

$$\Omega = \frac{m'}{M+m}\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}H\right\}$$

Betrachten wir nun den ersten Fall (Art. 2.) und substituiren die diesem zukommende Reihe für $\frac{1}{\Delta}$, so ergiebt sich

$$\Omega = \frac{m'}{M+m}\left\{\frac{1}{r'} + \frac{r^2}{r'^3}U_2 + \frac{r^3}{r'^4}U_3 + \frac{r^4}{r'^5}U_4 + \text{etc.}\right\}$$

Es verdient bemerkt zu werden, daſs das Glied $\frac{r}{r'^2}H$ der Störungsfunction, welches aus der Anziehung, die der Planet auf die Sonne ausübt, entsteht, in diesem Falle die entwickelte Störungsfunction vereinfacht, während dasselbe Glied die analytische Form der Differentialgleichungen des Problems der drei Körper mehr complicirt macht. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche die Bewegungen der einzelnen Körper eines Systems um einen willkührlichen festen Punkt, so wie die, welche die Bewegung derselben um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt ausdrücken, kann man bekanntlich von den partiellen Differentialquotienten einer und derselben Gröſse abhängig machen, sie sind daher, analytisch betrachtet, einfacher wie die Differentialgleichungen, welche die relative Bewegung dieser Körper um einen derselben ausdrücken, da man in diesen für jeden Körper eine besondere, mehr zusammengesetzte Störungsfunction (die eben für den Kometen Ω genannte) einführen muſs. Demohngeachtet ist die Entwickelung dieser einfacher wie die jener, denn es verschwindet hier das erste und gröſste Glied, welches bei jenen nicht der Fall ist. Daſs dasselbe Glied $\frac{r}{r'^2}H$ auch in dem Falle, wo $r > r'$ ist, wesentlich zur Vereinfachung der Störungen beiträgt, wird sogleich gezeigt werden. Wir erblicken hier einen Beleg zu dem Umstande, der sich so oft darbietet, daſs nicht immer die in analytischer Beziehung einfachsten Grundformeln für die Anwendung die zweckmäſsigsten und einfachsten sind.

Erwägen wir, daſs wir zur Ermittelung der Störungen des Kometen nicht Ω selbst, sondern nur dessen Differentialquotienten in Bezug auf die

Coordinaten des Kometen brauchen, so ergiebt sich von selbst, dafs wir das erste Glied der vorstehenden Reihe weglassen können. Wir haben demnach

(1) ...... $$\Omega = \frac{m'}{M+m}\left\{\frac{r^2}{r'^3}U_2 + \frac{r^3}{r'^4}U_3 + \frac{r^4}{r'^5}U_4 + \text{etc.}\right\}$$

Substituiren wir die dem zweiten Falle zukommende Entwickelung von $\frac{1}{\Delta}$ in den Ausdruck

$$\Omega = \frac{m'}{M+m}\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}H\right\}$$

so ergiebt sich

$$\Omega = \frac{m'}{M+m}\left\{\frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}U_1 + \frac{r'^2}{r^3}U_2 + \frac{r'^3}{r^4}U_3 + \text{etc.} - \frac{r}{r'^2}H\right\}$$

Es wird aber weiter unten gezeigt werden, dafs die Glieder

$$\frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}U_1 - \frac{r}{r'^2}H$$

wenn sie zusammen in die Ausdrücke für die Differentiale der Störungen substituirt werden, ohne Hülfe von unendlichen Reihen integrabel sind, sie sondern sich durch diese Eigenschaft von selbst von den übrigen Gliedern ab, und es bleibt übrig

(2) ...... $$\Omega = \frac{m'}{M+m}\left\{\frac{r'^2}{r^3}U_2 + \frac{r'^3}{r^4}U_3 + \frac{r'^4}{r^5}U_4 + \text{etc.}\right\}$$

welcher Ausdruck dem eben für den ersten Fall gefundenen darin analog ist, dafs er wie dieser bei dem mit U_2 multiplicirten Gliede anfängt.

5.

Den Grad oder die Gröfse der Convergenz, die in jedem speciellen Falle die im vorhergehenden Artikel entwickelten Ausdrücke (1) und (2) von Glied zu Glied zeigen, will ich die natürliche Convergenz der Störungsfunction nennen, denn diese prägt sich in der Entwickelung derselben nach den Vielfachen des Winkels zwischen den Radien r und r', der einfachsten Winkelgröfse, von welcher man die Störungsfunction abhängig machen kann, bestimmt aus, man möge diese Entwickelung auf irgend welche Art man wolle, ausführen. Ich halte dafür, dafs man, abgesehen von der Verminderung, die sie durch die Integrationen erleidet, diese Convergenz auf keine Weise vergröfsern kann, und dafs man daher in der Entwickelung der Störungen sich mit derselben, so wie sie nach Maafsgabe

der Umstände beschaffen ist, begnügen muſs. Sie kann aber in der weiteren Entwickelung, durch die Art und Weise derselben, beträchtlich vermindert werden, und der wesentlichste Punkt daher, worauf man sein Augenmerk zu richten hat, besteht darin: zu bewirken, daſs die Verminderung der natürlichen Convergenz der Störungsfunction möglichst gering werde.

6.

Durch die Entwickelung der Störungsfunction nach den Vielfachen der Sinusse und Cosinusse der mittleren Anomalie der beiden in Betracht kommenden Himmelskörper, und die dabei zugleich stattfindende, nicht zu vermeidende Entwickelung der Coefficienten in unendliche, nach den Potenzen der Excentricitäten und Neigungen fortschreitenden Reihen, sey es, daſs man diese explicite darstellt oder deren Summen, d. h. die Coefficienten selbst, durch Transcendenten ausdrückt, wird die natürliche Convergenz der Störungsfunction, selbst wenn die Excentricitäten und Neigungen klein sind, merklich vermindert, und schon wenn diese Gröſsen einiger Maaſsen beträchtlich sind, vermindert sich die natürliche Convergenz so sehr, daſs man auf den Gebrauch der dadurch entstehenden unendlichen Reihen Verzicht leisten muſs. In viel höherem Grade findet dieses statt, wenn Excentricitäten und Neigungen wie die der Kometenbahnen in Betracht kommen. Es ist daher nöthig, bei der Auflösung der Aufgabe, die uns hier beschäftigt, in der Störungsfunction sowohl wie in allen übrigen Functionen, deren Entwickelung erforderlich ist, unendliche nach den Potenzen der Excentricität und Neigung der Kometenbahn fortschreitende Reihen zu vermeiden.

Die gänzliche Vermeidung solcher *unendlichen* Reihen ist die Basis des Verfahrens, welches ich hier darzulegen im Begriff bin.

§. II.

Entwickelung der Störungsfunction in dem Falle, wo $r < r'$.

7.

Nennen wir die gegenseitige Neigung der Kometen- und der Planetenbahn I, den Winkel in der Kometenbahn vom aufsteigenden Knoten derselben mit der Planetenbahn bis zum Orte des Perihels des Kometen $N+K$, den Winkel in der Planetenbahn von demselben Knoten bis zum Perihel des Planeten $N-K$, die wahre Anomalie des Kometen f, die des Planeten f', dann ist

$$H = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \cos(f - f' + 2K) + \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos(f + f' + 2N)$$

Die Gröfsen I, K und N sind gemeiniglich nicht unmittelbar gegeben, sondern statt dessen

ω . . . die Entfernung des Perihels der Cometenbahn von dem aufsteigenden Knoten derselben auf der Fundamentalebene *);

θ . . . die Länge dieses aufsteigenden Knotens;

i . . . die Neigung der Kometenbahn gegen dieselbe Fundamentalebene;

ω' . . . , θ' . . . , i' . . . resp. dieselben Gröfsen in Bezug auf die Planetenbahn und dieselbe Fundamentalebene.

Um hieraus jene berechnen zu können, mufs man die Gröfsen **)

*) Gemeiniglich die Ecliptik.

**) S. *Fundamenta nova investigationis orbitae Lunae etc.* pag. 82. art. 22. und pag. 91. art. 25.

Φ . . . Entfernung des Knotens, dessen Länge θ genannt wurde, von dem aufsteigenden Knoten der Kometenbahn auf der Planetenbahn;

Ψ . . . Entfernung des Knotens, dessen Länge θ' genannt wurde, von demselben gegenseitigen Knoten;

einführen, hiermit ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}I\sin\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i+i')\\
\sin\tfrac{1}{2}I\cos\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i-i')\\
\cos\tfrac{1}{2}I\sin\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i+i')\\
\cos\tfrac{1}{2}I\cos\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i-i')
\end{aligned}$$

Wenn man die Werthe von i, i', θ und θ', die einer bestimmten Zeitepoche angehören, in diese Gleichungen substituirt, so bekommt man die Werthe von I, Φ und Ψ, die derselben Epoche zukommen. Nennen wir nun die Werthe von N und K, die für diese Epoche gelten, resp. ν und k, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
2\nu &= \omega+\omega'-(\Psi+\Phi)\\
2k &= \omega-\omega'+(\Psi-\Phi)
\end{aligned}$$

Mit diesen ν und k genannten Grölsen, statt N und K, müssen die numerischen Rechnungen ausgeführt werden.

8.

Nehmen wir den im vorigen Artikel gegebenen Ausdruck für H vor, und bringen ihn auf folgende Form

$$H = A\cos f + B\sin f$$

dann ist

$$\begin{aligned}
A &= \cos^2\tfrac{1}{2}I\cos(f'-2K)+\sin^2\tfrac{1}{2}I\cos(f'+2N)\\
B &= \cos^2\tfrac{1}{2}I\sin(f'-2K)-\sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(f'+2N)
\end{aligned}$$

Die Grölsen A und B können wir auf folgende Form bringen

$$\begin{aligned}
A &= l\cos(f'-L)\\
B &= l'\sin(f'-L')
\end{aligned}$$

wenn wir

$$
\begin{aligned}
l \sin L &= \cos^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2K - \sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2N \\
l \cos L &= \cos^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2K + \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2N \\
l' \sin L' &= \cos^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2K + \sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2N \\
l' \cos L' &= \cos^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2K - \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2N
\end{aligned}
$$

machen. Die Gröfsen A und B sind immer kleiner, oder wenigstens nie gröfser wie 1, denn l und l' besitzen diese Eigenschaft. Entwickeln wir die Werthe derselben aus den vorstehenden Ausdrücken, so finden wir

$$
\begin{aligned}
l^2 &= 1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 I \big(1 - \cos 2(K + N)\big) \\
l'^2 &= 1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 I \big(1 + \cos 2(K + N)\big)
\end{aligned}
$$

macht man hierin $I = 0$ oder $I = 180^\circ$, so ergiebt sich $l = 1$ und $l' = 1$, für alle übrigen Werthe von I ist l sowohl wie l' kleiner oder wenigstens nie gröfser wie 1. Wenn $N + K = 0$, oder $= 180^\circ$, dann ist $l = 1$ und $l' < 1$, wenn dagegen $N + K = 90^\circ$, oder $= 270^\circ$, dann ist $l < 1$ und $l' = 1$, die Neigung mag übrigens seyn wie sie will. Ist zugleich die Neigung $I = 90^\circ$, so ist resp. $l' = 0$, oder $l = 0$. In allen andern Fällen sind beides l und $l' < 1$. Aus den vorstehenden Gleichungen folgt die Bedingungsgleichung

$$\sqrt{l^2 + l'^2 - 1} = \cos I$$

die zur Prüfung der numerischen Rechnungen angewandt werden kann. Da also die Werthe von l und l' immer kleiner sind oder wenigstens nie gröfser werden können, wie in dem Falle, wo die Kometen- und Planetenbahn in einer und derselben Ebene liegen, so folgt, dafs in der Form, die wir oben der Gröfse H gegeben haben, das Vorhandenseyn einer Neigung der Kometenbahn gegen die Planetenbahn der natürlichen Convergenz der Störungsfunction keinen Eintrag thun kann.

9.

Es wird sich weiter unten zeigen, dafs in den Ausdrücken für die Störungen die Differentialquotienten von Ω allenthalben mit dem Factor $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$, wo a die halbe grofse Achse, und e die Excentricität der Kometenbahn ist, multiplicirt sind. Multipliciren wir daher den Ausdruck (1) für Ω in Art. 4. mit diesem Factor, substituiren die Werthe von U_2, U_3, etc. aus Art. 1.,

so wie den Ausdruck für H, der im vorigen Artikel gefunden wurde, setzen überdies

$$x = \frac{r}{a}\cos f$$
$$y = \frac{r}{a}\sin f$$

dann erhalten wir

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega = x^2C_{2,0} + xyC_{1,1} + y^2C_{0,2} + x^3C_{3,0} + x^2yC_{2,1} + xy^2C_{1,2} + y^3C_{0,3} + \text{etc.}$$

wo zur Abkürzung

$$C_{2,0} = \frac{m'}{M+m}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{a^3}{r'^3}\left(\tfrac{3}{2}A^2-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$C_{1,1} = \frac{m'}{M+m}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{a^3}{r'^3}\,3AB$$
$$C_{0,2} = \frac{m'}{M+m}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{a^3}{r'^3}\left(\tfrac{3}{2}B^2-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$C_{3,0} = \frac{m'}{M+m}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{a^4}{r'^4}\left(\tfrac{5}{2}A^3-\tfrac{3}{2}A\right)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

gesetzt worden sind. Hieraus folgt, daſs wir allgemein annehmen können

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega = \Sigma x^k y^l C_{k,l}$$

wenn wir die Glieder weglassen, in welchen $k+l<2$ ist. Um den allgemeinen Ausdruck für $C_{k,l}$ zu finden, entwickele ich die Gröſse

$$X = (1-2A\xi-2B\eta+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

in die unendliche Reihe

$$X = \Sigma \xi^k \eta^l D_{k,l}$$

Wir erhalten zuerst

$$X = 1+\tfrac{1}{2}(2A\xi+2B\eta-\xi^2-\eta^2)+\tfrac{1.3}{2.4}(2A\xi+2B\eta-\xi^2-\eta^2)^2+\tfrac{1.3.5}{2.4.6}(2A\xi+2B\eta-\xi^2-\eta^2)^3+\text{etc.}$$

Man findet hieraus leicht, daſs alle Glieder, in welchen der Exponent von $2A\xi+2B\eta-\xi^2-\eta^2$ gröſser als $k+l$ ist, keine mit $\xi^k\eta^l$ multiplicirten Glieder enthalten können. Setzen wir daher $k+l=n$, so sind alle fraglichen Glieder in dem folgenden Ausdrucke enthalten

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}(2A\xi+2B\eta-\xi^2-\eta^2)^n+\frac{1.3.5\ldots 2n-3}{2.4.6\ldots 2n-2}(2A\xi+2B\eta-\xi^2-\eta^2)^{n-1}+\text{etc.}$$

Zerlegen wir das Quadrinom in zwei Binome, dann bekommen wir folgenden, alle mit $\xi^k\eta^l$ multiplicirten Glieder enthaltenden Ausdruck

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}(A\xi+B\eta)^n-\frac{1.3.5\ldots 2n-3}{1.2.3\ldots n-1}\cdot\frac{n-1}{1}\frac{(A\xi+B\eta)^{n-2}}{2}(\xi^2+\eta^2)$$
$$+\frac{1.3.5\ldots 2n-5}{1.2.3\ldots n-2}\cdot\frac{n-2.n-3}{1.2}\frac{(A\xi+B\eta)^{n-4}}{4}(\xi^2+\eta^2)^2-\text{etc.}$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes giebt in $D_{k,l}$ das Glied

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots l}A^kB^l$$

Das zweite Glied giebt die beiden Glieder

$$-\tfrac{1}{2}\frac{1.3.5\ldots 2n-3}{1.2\ldots k.1.2\ldots l-2}A^kB^{l-2}-\tfrac{1}{2}\frac{1.3.5\ldots 2n-3}{1.2\ldots k-2.1.2\ldots l}A^{k-2}B^l$$

u. s. f. Auf diese Art ergiebt sich leicht

$$\begin{aligned}D_{k,l}=\;&\frac{1.3.5\ldots 2(k+l)-1}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots l}A^kB^l\\
&-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1.3.5\ldots 2(k+l)-3}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots l-2}\cdot\frac{A^kB^{l-2}}{1}+\frac{1.3.5\ldots 2(k+l)-3}{1.2.3\ldots k-2.1.2\ldots l}\cdot\frac{A^{k-2}B^l}{1}\right\}\\
&+\tfrac{1}{4}\left\{\frac{1.3\ldots 2(k+l)-5}{1.2\ldots k.1.2\ldots l-4}\cdot\frac{A^kB^{l-4}}{1.2}+2\frac{1.3\ldots 2(k+l)-5}{1.2\ldots k-2.1.2\ldots l-2}\cdot\frac{A^{k-2}B^{l-2}}{1.2}+\frac{1.3\ldots 2(k+l)-5}{1.2\ldots k-4.1.2\ldots l}\cdot\frac{A^{k-4}B^l}{1.2}\right\}\\
&-\tfrac{1}{8}\left\{\frac{1.3\ldots 2(k+l)-7}{1.2\ldots k.1.2\ldots l-6}\cdot\frac{A^kB^{l-6}}{1.2.3}+3\frac{1.3\ldots 2(k+l)-7}{1.2\ldots k-2.1.2\ldots l-4}\cdot\frac{A^{k-2}B^{l-4}}{1.2.3}+3\frac{1.3\ldots 2(k+l)-7}{1.2\ldots k-4.1.2\ldots l-2}\cdot\frac{A^{k-4}B^{l-2}}{1.2.3}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1.3\ldots 2(k+l)-7}{1.2\ldots k-6.1.2\ldots l}\cdot\frac{A^{k-6}B^l}{1.2.3}\right\}\\
&+\text{etc.}\end{aligned}$$

wo das Gesetz des Fortganges klar ist. Nennen wir nun die grofse Halbachse der Planetenbahn a', dann ist

$$C_{k,l}=\frac{m'}{M+m}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{a'}\right)^{k+l+1}\left(\frac{a'}{r'}\right)^{k+l+1}D_{k,l}$$

Aus vorstehendem Ausdruck ergeben sich die speciellen Werthe von $D_{k,l}$, die ich bei der Berechnung der Saturnstörungen des Encke'schen Kometen gebraucht habe, wie folgt

$$D_{2,0} = \frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{2};$$
$$D_{1,1} = 3AB;$$
$$D_{0,2} = \frac{3}{2}B^2 - \frac{1}{2};$$
$$D_{3,0} = \frac{5}{2}A^3 - \frac{3}{2}A;$$
$$D_{2,1} = \frac{15}{2}A^2 B - \frac{3}{2}B;$$
$$D_{1,2} = \frac{15}{2}AB^2 - \frac{3}{2}A;$$
$$D_{0,3} = \frac{5}{2}B^3 - \frac{3}{2}B;$$
$$D_{4,0} = \frac{35}{8}A^4 - \frac{15}{4}A^2 + \frac{3}{8};$$
$$D_{3,1} = \frac{35}{2}A^3 B - \frac{15}{2}AB;$$
$$D_{2,2} = \frac{105}{4}A^2 B^2 - \frac{15}{4}A^2 - \frac{15}{4}B^2 + \frac{3}{4};$$
$$D_{1,3} = \frac{35}{2}AB^3 - \frac{15}{2}AB;$$
$$D_{0,4} = \frac{35}{8}B^4 - \frac{15}{4}B^2 + \frac{3}{8};$$
$$D_{5,0} = \frac{63}{8}A^5 - \frac{35}{4}A^3 + \frac{15}{8}A;$$
$$D_{4,1} = \frac{315}{8}A^4 B - \frac{105}{4}A^2 B + \frac{15}{8}B;$$
$$D_{3,2} = \frac{315}{4}A^3 B^2 - \frac{35}{4}A^3 - \frac{105}{4}AB^2 + \frac{15}{4}A;$$
$$D_{2,3} = \frac{315}{4}A^2 B^3 - \frac{105}{4}A^2 B - \frac{35}{4}B^3 + \frac{15}{4}B;$$
$$D_{1,4} = \frac{315}{8}AB^4 - \frac{105}{4}AB^2 + \frac{15}{8}A;$$
$$D_{0,5} = \frac{63}{8}B^5 - \frac{35}{4}B^3 + \frac{15}{8}B;$$
$$D_{6,0} = \frac{231}{16}A^6 - \frac{315}{16}A^4 + \frac{105}{16}A^2 - \frac{5}{16};$$
$$D_{5,1} = \frac{693}{8}A^5 B - \frac{315}{4}A^3 B + \frac{105}{8}AB;$$
$$D_{4,2} = \frac{3465}{16}A^4 B^2 - \frac{315}{16}A^4 - \frac{945}{8}A^2 B^2 + \frac{105}{8}A^2 + \frac{105}{16}B^2 - \frac{15}{16};$$
$$D_{3,3} = \frac{1155}{4}A^3 B^3 - \frac{315}{4}A^3 B - \frac{315}{4}AB^3 + \frac{105}{4}AB;$$
$$D_{2,4} = \frac{3465}{16}A^2 B^4 - \frac{945}{8}A^2 B^2 - \frac{315}{16}B^4 + \frac{105}{16}A^2 + \frac{105}{8}B^2 - \frac{15}{16};$$
$$D_{1,5} = \frac{693}{8}AB^5 - \frac{315}{4}AB^3 + \frac{105}{8}AB;$$
$$D_{0,6} = \frac{231}{16}B^6 - \frac{315}{16}B^4 + \frac{105}{16}B^2 - \frac{5}{16};$$

10.

Nennen wir die excentrische Anomalie des Kometen u, dann ist

$$x = \cos u - e$$
$$y = \sqrt{1-e^2} \cdot \sin u$$

Hiemit ergiebt sich

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \Omega = \Sigma (1-e^2)^{\frac{l}{2}} \cdot \sin^l u \, (\cos u - e)^k C_{k,l}$$

Da k und l immer ganze und positive Zahlen sind, so besteht jedes dieser Glieder von Ω aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, die man nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalie des Kometen ordnen kann. Die Coefficienten dieser Sinusse und Cosinusse sind endliche Functionen der Excentricität des Kometen, oder mit andern Worten ganze und rationale Functionen der Gröſsen e und $\sqrt{1-e^2}$. Bei dieser Entwickelung sind also unendliche, nach den Potenzen der Excentricität des Kometen fortlaufende Reihen in der Störungsfunction gänzlich vermieden, und daher ihrer natürlichen Convergenz kein Eintrag geschehen. Die Form der Glieder in $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \Omega$ ist demnach, wenn l eine grade Zahl ist, folgende

$$\{\alpha + \alpha_1 \cos u + \alpha_2 \cos 2u + \ldots + \alpha_{k+l-1} \cos (k+l-1) u + \alpha_{k+l} \cos (k+l) u\} C_{k,l}$$

und wenn l eine ungrade Zahl ist

$$\{\beta_1 \sin u + \beta_2 \sin 2u + \ldots + \beta_{k+l-1} \sin (k+l-1) u + \beta_{k+l} \sin (k+l) u\} C_{k,l}$$

Die Gröſsen $D_{k,l}$ lassen sich alle in endliche Functionen der Vielfachen der Sinusse und Cosinusse der wahren Anomalie des Planeten entwickeln. Ihre Form ist diese, wenn $k+l$ eine grade Zahl ist

$$D_{k,l} = \gamma_{k+l} \cos (k+l) f' + \gamma_{k+l-2} \cos (k+l-2) f' + \ldots + \gamma_2 \cos 2f' + \gamma_0$$
$$+ \varepsilon_{k+l} \sin (k+l) f' + \varepsilon_{k+l-2} \sin (k+l-2) f' + \ldots + \varepsilon_2 \sin 2f'$$

und wenn $k+l$ eine ungrade Zahl ist

$$D_{k,l} = \gamma_{k+l} \cos (k+l) f' + \gamma_{k+l-2} \cos (k+l-2) f' + \ldots + \gamma_1 \cos f'$$
$$+ \varepsilon_{k+l} \sin (k+l) f' + \varepsilon_{k+l-2} \sin (k+l-2) f' + \ldots + \varepsilon_1 \sin f'$$

wo alle Coefficienten γ und ε ganze und rationale Functionen von $\sin^2 \frac{1}{2} I$ sind.

Hieraus ergiebt sich, daſs die Gröſsen $C_{k,l}$ sich gleichfalls in endliche Functionen der wahren Anomalie des Planeten entwickeln lassen, und daſs die Coefficienten aller Glieder dieser Functionen endliche Functionen der Excentricität des Planeten sind. Denn

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^{k+l+1} = \frac{(1+e'\cos f')^{k+l+1}}{(1-e'^2)^{k+l+1}}$$

und da $k+l+1$ immer eine ganze und positive Zahl ist, so läſst sich dieser Ausdruck in folgende endliche Reihe auflösen

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^{k+l+1} = \lambda_0 + \lambda_1 \cos f' + \ldots + \lambda_{k+l} \cos(k+l)f' + \lambda_{k+l+1} \cos(k+l+1)f'$$

in welcher die Coefficienten λ ganze und rationale Functionen von e' und $\frac{1}{1-e'^2}$ sind. Es ergiebt sich hieraus, daſs die Form der Gröſsen $C_{k,l}$ nach ihrer Entwickelung die folgende ist

$$\begin{aligned} C_{k,l} = \mu_0 + \mu_1 \cos f' + \ldots + \mu_{2(k+l)} \cos 2(k+l)f' + \mu_{2(k+l)+1} \cos[2(k+l)+1]f' \\ + \varrho_1 \sin f' + \ldots + \varrho_{2(k+l)} \sin 2(k+l)f' + \varrho_{2(k+l)+1} \sin[2(k+l)+1]f' \end{aligned}$$

wo alle Coefficienten ganze und rationale Functionen von e', $\frac{1}{1-e'^2}$ und $\sin^2 \frac{1}{2} I$ sind.

Verbindet man diesen Ausdruck mit der obigen Form der Coefficienten von $C_{k,l}$ in $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\Omega$, so ergiebt sich, daſs diese Gröſse endlich die folgende Form haben wird,

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\Omega = \Sigma K_{i,i'} \cos(iu+i'f') + \Sigma L_{i,i'} \sin(iu+i'f')$$

und daſs die Coefficienten $K_{i,i'}$ und $L_{i,i'}$ keine unendlichen, nach den Potenzen der Excentricitäten und der gegenseitigen Neigung fortschreitenden Reihen enthalten, sondern aus lauter ganzen und rationalen Functionen der Gröſsen

$$e', \frac{1}{1-e'^2}, e, \sqrt{1-e^2} \text{ und } \sin^2 \tfrac{1}{2} I$$

bestehen, mithin der natürlichen Convergenz der Störungsfunction kein Eintrag, oder doch gewiſs nur der möglichst geringe Eintrag geschehen ist.

Durch die vorstehende Auseinandersetzung ist zugleich angedeutet, wie man bei der Entwickelung der Störungsfunction im zweiten Falle, wo $r > r'$ ist, zu verfahren hat.

11.

Wegen der geringen Excentricität der Planeten ist es, wenigstens in den meisten Fällen, nicht nöthig, die unendlichen, nach den Potenzen der Excentricität des Planeten fortschreitenden Reihen zu vermeiden. Man vergiebt dadurch freilich etwas an der natürlichen Convergenz der Störungsfunction, aber die Verminderung, die sie dadurch erleidet, ist nicht so groſs, daſs sie schädlich würde, man erlangt im Gegentheil, während man in dieser Beziehung etwas vergiebt, in Bezug auf die Leichtigkeit der Integration und der nachherigen Anwendung der Störungen einige Vortheile. Ich gebe demnach der Störungsfunction folgende Form

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega = \Sigma M_{i,i'} \cos(iu+i'g') + \Sigma N_{i,i'} \sin(iu+i'g')$$

wo g' die mittlere Anomalie des Planeten ist.

Es ist nun für den hier zu erreichenden Zweck gleichgültig, welches Verfahren angewendet wird, um Ω oder deren Differentialquotienten zu entwickeln, wenn durch die Entwickelung nur die vorstehende Form zu Wege gebracht wird, und die Werthe der Coefficienten vollständig erhalten werden. Denn es entsprechen dieser Form bestimmte Werthe der Coefficienten $M_{i,i'}$ und $N_{i,i'}$, und es muſs daher jede Entwickelungsmethode, wenn sie nur auf richtige Sätze basirt ist, und Vollständigkeit geben kann, auf dieselben Werthe der Coefficienten führen. Es kann sogar am vortheilhaftesten seyn, in einem speciellen Falle dieses, und in einem andern jenes Verfahren anzuwenden. Bei der Berechnung der oben angeführten Saturnstörungen des Encke'schen Kometen habe ich zur Entwickelung der Differentialquotienten von Ω dieselbe Zerlegung und dieselben Gröſsen angewandt, welche mir im Vorhergehenden gedient haben, um die Form zu finden, die man in der vorliegenden Aufgabe der Entwickelung geben muſs, um die gröſstmögliche Convergenz hervor zu bringen. Dieses Verfahren hat mich in diesem Beispiel sehr schnell zum Ziele geführt, denn die Entwickelung der Differentialquotienten von Ω hat nur 3 Tage Arbeit verursacht.

Auch bei der Berechnung der Jupiterstörungen desselben Kometen, so wie bei der der Jupiter-, Saturn- und Uranusstörungen der 4 neuen Planeten, und noch in manchen andern Fällen wird dasselbe Verfahren zu den zweckmäſsigsten gehören, ich werde es daher ausführlich beschreiben.

12.

Zuerst werden die Gröfsen $D_{k,l}$ des Art. 9. durch die Vielfachen der Sinusse und Cosinusse der wahren Anomalie ausgedrückt. Hierfür könnte man analytische Ausdrücke entwickeln, allein ich habe dieses nicht gethan, weil die Coefficienten dieser Ausdrücke sehr zusammengesetzt werden, wenn die Indices k und l einiger Maafsen grofse Werthe erhalten. Ein zweiter Grund, weshalb ich dieses Verfahren nicht angewandt habe, ist, dafs man bei der Anwendung dieser analytischen Ausdrücke keine Controllen für die numerische Rechnung erhält. Ich habe die Entwickelung durch Hülfe von speciellen Werthen von A und B ausgeführt; dieses Verfahren, welches bekanntlich auf mechanische Quadraturen beruht, wird in diesem Falle strenge, weil die Entwickelung von A und B auf endliche Ausdrücke führt. Berechnet man nun einige specielle Werthe mehr als für die Entwickelung unumgänglich nöthig wäre, so ergeben sich von selbst Bedingungen, durch welche man sich der Richtigkeit der numerischen Rechnung versichern kann. Ich habe bei dieser Rechnung den Umkreis in 16 gleiche Theile getheilt, und dem zufolge durch die Ausdrücke

$$A = l \cos (f' - L)$$
$$B = l' \sin (f' - L')$$

von A und B und ihren ganzen und positiven Potenzen die 8 Werthe berechnet, welche den Werthen $f' = 0$, $= 22^\circ 30'$, $= 45^\circ$, $= 67^\circ 30'$, etc. bis $157^\circ 30'$ entsprechen. Hieraus wurden die Werthe eines jeden der Coefficienten $D_{k,l}$ berechnet, wobei ich jedoch für die Gröfsen, in welchen $k+l=2$ oder $= 3$ ist, nur die Hälfte jener 8 Werthe benutzte. Die so berechneten speciellen Werthe von $D_{k,l}$ will ich der Reihe nach

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ Y_7$$

nennen. Bezeichnen wir ferner mit c_i den Coefficienten von $\cos if'$, und mit s_i den von $\sin if'$ in der Entwickelung irgend einer der Gröfsen $D_{k,l}$, dann ergiebt sich, wenn $k+l$ eine grade Zahl ist

$$8c_0 = \frac{(0)}{(2)} + \frac{(1)}{(2)}$$
$$8c_8 = \frac{(0)}{(2)} - \frac{(1)}{(2)}$$
$$2\{c_2 + c_6\} = [\tfrac{0}{4}]$$
$$2\{c_2 - c_6\} = \{[\tfrac{1}{4}] - [\tfrac{3}{4}]\} \cos 45^\circ$$
$$2\{s_2 + s_6\} = \{[\tfrac{1}{4}] + [\tfrac{3}{4}]\} \cos 45^\circ$$
$$2\{s_2 - s_6\} = [\tfrac{2}{4}]$$
$$4c_4 = \frac{(0)}{(4)} - \frac{(2)}{(4)}$$
$$4s_4 = \frac{(1)}{(4)} - \frac{(3)}{(4)}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{(0)}{(4)} = Y_0 + Y_4;\quad [\tfrac{0}{4}] = Y_0 - Y_4$$
$$\frac{(1)}{(4)} = Y_1 + Y_5;\quad [\tfrac{1}{4}] = Y_1 - Y_5$$
$$\frac{(2)}{(4)} = Y_2 + Y_6;\quad [\tfrac{2}{4}] = Y_2 - Y_6$$
$$\frac{(3)}{(4)} = Y_3 + Y_7;\quad [\tfrac{3}{4}] = Y_3 - Y_7$$
$$\frac{(0)}{(2)} = \frac{(0)}{(4)} + \frac{(2)}{(4)}$$
$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{(1)}{(2)} + \frac{(3)}{(4)}$$

gesetzt ist. Wenn $k+l$ eine **ungrade** Zahl ist, hat man

$$2\{c_1 + c_7\} = Y_0 + \{Y_2 - Y_6\} \cos 45^\circ$$
$$2\{c_1 - c_7\} = \{Y_1 - Y_7\} \cos 22^\circ 30' + \{Y_3 - Y_5\} \sin 22^\circ 30'$$
$$2\{s_1 + s_7\} = \{Y_1 + Y_7\} \sin 22^\circ 30' + \{Y_3 + Y_5\} \cos 22^\circ 30'$$
$$2\{s_1 - s_7\} = \{Y_2 + Y_6\} \cos 45^\circ + Y_4$$
$$2\{c_3 + c_5\} = Y_0 - \{Y_2 - Y_6\} \cos 45^\circ$$
$$2\{c_3 - c_5\} = \{Y_1 - Y_7\} \sin 22^\circ 30' - \{Y_3 - Y_5\} \cos 22^\circ 30'$$
$$2\{s_3 + s_5\} = \{Y_1 + Y_7\} \cos 22^\circ 30' - \{Y_3 + Y_5\} \sin 22^\circ 30'$$
$$2\{s_3 - s_5\} = \{Y_2 + Y_6\} \cos 45^\circ - Y_4$$

Hierauf entwickelte ich die Gröfsen $\frac{\sin if'}{r'^n}$ und $\frac{\cos if'}{r'^n}$ in unendliche Reihen, die nach den Vielfachen der Sinusse oder Cosinusse der mittleren Anomalie

des Planeten fortschreiten, die Multiplication dieser mit den vorher gefundenen Coefficienten von $D_{k,l}$ und mit der Gröſse $\frac{m'}{M+m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+l+1}$ gab die Entwickelung von $C_{k,l}$. Z. B. man habe

$$D_{2,1} = c_1 \cos f' + s_1 \sin f' + c_3 \cos 3f' + s_3 \sin 3f'$$

$$\frac{a'^4}{r'^4} \cos f' = \alpha + \alpha_1 \cos g' + \alpha_2 \cos 2g' + \alpha_3 \cos 3g' + \alpha_4 \cos 4g' + \text{etc.}$$

$$\frac{a'^4}{r'^4} \sin f' = \beta_1 \sin g' + \beta_2 \sin 2g' + \beta_3 \sin 3g' + \beta_4 \sin 4g' + \text{etc.}$$

$$\frac{a'^4}{r'^4} \cos 3f' = \gamma + \gamma_1 \cos g' + \gamma_2 \cos 2g' + \gamma_3 \cos 3g' + \gamma_4 \cos 4g' + \text{etc.}$$

$$\frac{a'^4}{r'^4} \sin 3f' = \delta_1 \sin g' + \delta_2 \sin 2g' + \delta_3 \sin 3g' + \delta_4 \sin 4g' + \text{etc.}$$

wo ich alle Coefficienten schon durch Zahlen ausgedrückt voraussetze, dann erhält man, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{m'}{M+m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+l+1} = \mu_{k+l+1} \qquad \text{...... (1)}$$

macht

$$\begin{aligned} C_{2,1} = \; & \mu_4(\alpha c_1 + \gamma c_3) + \mu_4(\alpha_1 c_1 + \gamma_1 c_3)\cos g' + \mu_4(\alpha_2 c_1 + \gamma_2 c_3)\cos 2g' + \mu_4(\alpha_3 c_1 + \gamma_3 c_3)\cos 3g' \\ & + \mu_4(\alpha_4 c_1 + \gamma_4 c_3)\cos 4g' + \text{etc.} \\ & + \mu_4(\beta_1 s_1 + \delta_1 s_3)\sin g' + \mu_4(\beta_2 s_1 + \delta_2 s_3)\sin 2g' + \mu_4(\beta_3 s_1 + \delta_3 s_3)\sin 3g' \\ & + \mu_4(\beta_4 s_1 + \delta_4 s_3)\sin 4g' + \text{etc.} \end{aligned}$$

und so ferner für die übrigen $C_{k,l}$.

13.

Um die im vorhergehenden Artikel beschriebenen Rechnungen ausführen zu können ist es nöthig, daſs man vorher die Gröſsen $\frac{a'^n}{r'^n} \cos mf'$ und $\frac{a'^n}{r'^n} \sin mf'$ in unendliche, nach den Cosinussen oder Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalie des Planeten geordneten Reihen entwickelt habe. Diese Entwickelungen können auf mehrere Arten ausgeführt werden. Man kann die Entwickelungscoefficienten der angeführten Gröſsen, n und m mögen irgend welche, ganze und positive Zahlen bedeuten, als endliche und linearische Functionen von zwei Transcendenten und deren Differentialquotienten in Beziehung auf die Excentricität darstellen, und somit der Entwickelung

von $\frac{a'^n}{r'^n} \frac{\sin}{\cos} mf'$ jeden beliebigen Grad von Genauigkeit geben, wenn nur im Voraus die beiden Transcendenten hinreichend genau entwickelt worden sind. Durch dieses Verfahren habe ich im vierten Abschnitte der „*Fundamenta nova etc.*" die in der Mondtheorie erforderlichen Gröfsen $\frac{a'^n}{r'^n} \frac{\cos}{\sin} mf'$ entwickelt, und dabei für die beiden Transcendenten die Entwickelung von r^2 und die von $\frac{1}{r^2}$ gewählt. Dieses Verfahren ist zwar in Fällen, wie in der Mondtheorie, wo n und m kleine Zahlen sind, bequem anwendbar, aber es hört auf practisch brauchbar zu seyn, wenn m eine grofse Zahl, und die Excentricität klein ist, weil alsdann die zu berechnenden Entwickelungscoefficienten aus kleinen Differenzen grofser Zahlen bestehen. Dieser Umstand hat seinen Grund darin, dafs alle Glieder der Ausdrücke für $\sin mf'$ und $\cos mf'$ mit e^m dividirt sind, während nach der Substitution der angeführten Transcendenten keine negativen Potenzen der Excentricitäten mehr vorkommen können. Alle derartigen Glieder heben sich also bei der Addition der Glieder der endlichen Ausdrücke von $\sin mf'$ und $\cos mf'$ gegen einander auf. Wollte man z. B. auf diese Art die Gröfse $\frac{a^{15}}{r^{15}} \cos 14f$ oder $\frac{a^{15}}{r^{15}} \sin 14f$ nur bis auf Gröfsen von der Ordnung e^4 richtig entwickeln, so müfste man die beiden genannten Transcendenten bis auf Gröfsen der Ordnung e^{18} richtig haben.

Man kann anderntheils die in Rede stehenden Gröfsen durch Hülfe des Taylor'schen Theorems, und zwar auf mannigfaltige Art entwickeln, je nachdem man dieses Theorem so oder anders in Anwendung bringt. Alle diese Entwickelungen unterscheiden sich von jener unter andern dadurch, dafs keine Divisionen mit der Excentricität, und daher keine kleinen Differenzen grofser Glieder vorkommen. Die auf dieses Theorem gegründete Entwickelung, welche ich ausgeführt habe, besteht in Folgendem. Ich setze

$$\frac{a}{r} = 1 + \delta\left(\frac{a}{r}\right)$$

*) und nenne den i^{ten} Binominalcoefficienten der n^{ten} Potenz $A_{n,i}$. Also

$$A_{n,i} = \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,\ldots\, n-i+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\ldots\, i}$$

*) Ich bemerke, dafs ich um mehrerer Einfachheit Willen in diesem und dem folgenden Artikel a, r, f, g, e resp. statt a', r', f', g', e' geschrieben habe.

Hiermit ergiebt sich

$$\frac{a^n}{r^n} = 1 + A_{n,1}\,\delta\left(\frac{a}{r}\right) + A_{n,2}\,\delta\left(\frac{a}{r}\right)^2 + A_{n,3}\,\delta\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \text{etc.}$$

Sey ferner

$$f = g + \delta f$$

dann wird

$$\cos mf = \cos mg - \delta f\, m \sin mg - \tfrac{1}{2}\delta f^2\, m^2 \cos mg + \tfrac{1}{6}\delta f^3\, m^3 \sin mg + \text{etc.}$$
$$\sin mf = \sin mg + \delta f\, m \cos mg - \tfrac{1}{2}\delta f^2\, m^2 \sin mg - \tfrac{1}{6}\delta f^3\, m^3 \cos mg + \text{etc.}$$

Setzt man aufserdem

wenn i **grade** ist

$$\frac{1}{1.2\ldots i}\,\delta f^i\,\delta\left(\frac{a}{r}\right)^h = (i,h)_0 + 2\Sigma(i,h)_\nu \cos \nu g$$

und wenn i **ungrade** ist

$$\frac{1}{1.2\ldots i}\,\delta f^i\,\delta\left(\frac{a}{r}\right)^h = 2\Sigma(i,h)_\nu \sin \nu g$$

und multiplicirt diese Ausdrücke mit einander, so bekommt man

$$\frac{a^n}{r^n}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} mf = \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} mg\,\{1 + (0)_{n,0} - m^2(2)_{n,0} + m^4(4)_{n,0} - m^6(6)_{n,0} \pm \text{etc.}\}$$
$$+ \Sigma\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(m\pm\nu)g \begin{Bmatrix}(0)_{n,\nu} - m^2(2)_{n,\nu} + m^4(4)_{n,\nu} - m^6(6)_{n,\nu} \pm \text{etc.}\\ \pm\{m(1)_{n,\nu} - m^3(3)_{n,\nu} + m^5(5)_{n,\nu} \pm \text{etc.}\}\end{Bmatrix}$$

wo die Summation sich auf alle ganze und positive Werthe von ν, die Null ausgenommen, erstreckt, und zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(0)_{n,0} = A_{n,2}(0,2)_0 + A_{n,3}(0,3)_0 + A_{n,4}(0,4)_0 + A_{n,5}(0,5)_0 + \text{etc.}$$
$$(2)_{n,0} = (2,0)_0 + A_{n,1}(2,1)_0 + A_{n,2}(2,2)_0 + A_{n,3}(2,3)_0 + \text{etc.}$$
$$(4)_{n,0} = (4,0)_0 + A_{n,1}(4,1)_0 + \text{etc.}$$

etc.

$$(0)_{n,\nu} = A_{n,1}(0,1)_\nu + A_{n,2}(0,2)_\nu + A_{n,3}(0,3)_\nu + A_{n,4}(0,4)_\nu + A_{n,5}(0,5)_\nu + \text{etc.}$$
$$(2)_{n,\nu} = (2,0)_\nu + A_{n,1}(2,1)_\nu + A_{n,2}(2,2)_\nu + A_{n,3}(2,3)_\nu + \text{etc.}$$
$$(4)_{n,\nu} = (4,0)_\nu + A_{n,1}(4,1)_\nu + \text{etc.}$$

etc.

$$(1)_{n,\nu} = (1,0)_\nu + A_{n,1}(1,1)_\nu + A_{n,2}(1,2)_\nu + A_{n,3}(1,3)_\nu + A_{n,4}(1,4)_\nu + \text{etc.}$$
$$(3)_{n,\nu} = (3,0)_\nu + A_{n,1}(3,1)_\nu + A_{n,2}(3,2)_\nu + \text{etc.}$$
$$(5)_{n,\nu} = (5,0)_\nu + \text{etc.}$$

etc.

Dieser Ausdruck gewährt bei der Anwendung den Vortheil, dafs man die Entwickelungscoefficienten von $\frac{a^n}{r^n}$ sin mf zugleich mit denen von $\frac{a^n}{r^n}$ cos mf erhält, denn es geht aus demselben hervor, dafs sie einander gleich sind, wenn man die Argumente so stellt wie hier geschehen ist. Indem man aber die Argumente $m-\nu$ für die verschiedenen Werthe, die die ganze und positive Zahl ν annimmt, fortsetzt, kommt man auf negative Vielfache von g, und dadurch, dafs man diese mit den gleichen positiven vereinigt, entsteht eine Verschiedenheit in den Entwickelungscoefficienten der beiden Gröfsen $\frac{a^n}{r^n}\cos mf$ und $\frac{a^n}{r^n}\sin mf$, weil in der Entwickelung der ersteren, wegen $\cos(-w) = \cos w$, die betreffenden Coefficienten addirt, und in der Entwickelung der letzteren, wegen $\sin(-w) = -\sin w$, subtrahirt werden müssen. Eine andere Bequemlichkeit, die der vorstehende Ausdruck in der Anwendung darbietet, besteht darin, dafs die Coefficienten der von $\left\{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\right\} mg$ gleichweit zu beiden Seiten abstehenden Glieder aus denselben einzelnen Theilen bestehen, und nur durch die algebraischen Zeichen sich unterscheiden. Es ist ferner zu bemerken, dafs die Coefficienten von $(i, h)_\nu$ ganze Zahlen, und die Gröfsen $A_{n,i}$, von $i = n+1$ an, gleich Null sind.

14.

Um den, in dem vorhergehenden Artikel entwickelten Ausdruck anwenden zu können ist es nöthig, dafs man die Gröfsen $(i, h)_\nu$ in Function der Excentricität des Planeten ausgedrückt habe. Das allgemeine Gesetz einiger wenigen derselben kann man wohl auf einfache Weise angeben, aber für die meisten möchte es sehr zusammengesetzt ausfallen. Ich halte daher für das Zweckmäfsigste, sie nach den Potenzen der Excentricität zu entwickeln, und bei den Gliedern einer gewissen Ordnung stehen zu bleiben. Da ich glaube, dafs die sechste Potenz der Excentricität des Planeten die höchste ist, die bei der Anwendung dieser Ausdrücke zum vorliegenden Zwecke nothwendig werden kann, so habe ich meine Entwickelungen nicht über diese hinaus fortgesetzt; sollte ein Fall eintreten, in welchem die Anwendung von Gliedern höherer Ordnung nothwendig würde, so kann man die Entwickelungen ohne grofse Mühe auf diese ausdehnen. Bekannte Reihen sind folgende:

$$\delta\left(\frac{a}{r}\right) = \left(e-\frac{1}{8}e^3+\frac{1}{192}e^5\right)\cos g+\left(e^2-\frac{1}{3}e^4+\frac{1}{24}e^6\right)\cos 2g+\left(\frac{9}{8}e^3-\frac{81}{128}e^5\right)\cos 3g$$
$$+\left(\frac{4}{3}e^4-\frac{16}{15}e^6\right)\cos 4g+\frac{625}{384}e^5\cos 5g+\frac{81}{40}e^6\cos 6g$$

$$\delta f = \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right)\sin g + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right)\sin 2g + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right)\sin 3g$$
$$+ \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right)\sin 4g + \frac{1097}{960}e^5 \sin 5g + \frac{1223}{960}e^6 \sin 6g$$

Durch die Multiplicationen dieser, so wie der Potenzen und Producte derselben in einander, ergaben sich *):

$$(0,2)_0 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6$$
$$(0,3)_0 = \frac{3}{4}e^4 + \frac{5}{4}e^6$$
$$(0,4)_0 = \frac{3}{8}e^4 + \frac{15}{8}e^6$$
$$(0,5)_0 = \frac{5}{4}e^6$$
$$(0,6)_0 = \frac{5}{16}e^6$$

$$(2,0)_0 = e^2 + \frac{9}{64}e^4 + \frac{43}{576}e^6$$
$$(2,1)_0 = \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{12}e^6$$
$$(2,2)_0 = \frac{1}{4}e^4 + \frac{107}{384}e^6$$
$$(2,3)_0 = \frac{5}{16}e^6$$
$$(2,4)_0 = \frac{1}{8}e^6$$

$$(4,0)_0 = \frac{1}{4}e^4 + \frac{49}{576}e^6$$
$$(4,1)_0 = \frac{1}{24}e^6$$
$$(4,2)_0 = \frac{1}{24}e^6$$

$$(6,0)_0 = \frac{1}{36}e^6$$

$$(0,1)_1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{16}e^3 + \frac{1}{384}e^5$$
$$(0,2)_1 = \frac{1}{2}e^3 + \frac{1}{3}e^5$$
$$(0,3)_1 = \frac{3}{8}e^3 + \frac{33}{32}e^5$$
$$(0,4)_1 = e^5$$
$$(0,5)_1 = \frac{5}{16}e^5$$

$$(2,0)_1 = \frac{5}{8}e^3 + \frac{1}{32}e^5$$
$$(2,1)_1 = \frac{1}{4}e^3 + \frac{35}{384}e^5$$
$$(2,2)_1 = \frac{5}{16}e^5$$
$$(2,3)_1 = \frac{1}{8}e^5$$

$$(4,0)_1 = \frac{5}{24}e^5$$
$$(4,1)_1 = \frac{1}{24}e^5$$

$$(1,0)_1 = e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5$$
$$(1,1)_1 = -\frac{3}{16}e^3 - \frac{1}{192}e^5$$
$$(1,2)_1 = -\frac{1}{4}e^3 - \frac{1}{48}e^5$$
$$(1,3)_1 = \frac{5}{32}e^5$$
$$(1,4)_1 = \frac{1}{8}e^5$$

---

*) Ich habe diese Multiplicationen auf zwei verschiedene Arten ausgeführt, und glaube daher die Richtigkeit der folgenden Coefficienten verbürgen zu können.

$$(3,0)_1 = \frac{1}{2}e^3 - \frac{13}{192}e^5$$
$$(3,1)_1 = -\frac{1}{48}e^5$$
$$(3,2)_1 = \frac{1}{12}e^5$$

$$(5,0)_1 = \frac{1}{12}e^5$$

$$(0,1)_2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{48}e^6$$
$$(0,2)_2 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^4 + \frac{55}{192}e^6$$
$$(0,3)_2 = \frac{3}{4}e^4 + \frac{41}{32}e^6$$
$$(0,4)_2 = \frac{1}{4}e^4 + \frac{59}{32}e^6$$
$$(0,5)_2 = \frac{35}{32}e^6$$
$$(0,6)_2 = \frac{15}{64}e^6$$

$$(2,0)_2 = -\frac{1}{2}e^2 + \frac{2}{3}e^4 - \frac{157}{1536}e^6$$
$$(2,1)_2 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{7}{768}e^6$$
$$(2,2)_2 = 0e^4 + \frac{619}{1536}e^6$$
$$(2,3)_2 = \frac{17}{64}e^6$$
$$(2,4)_2 = \frac{1}{32}e^6$$

$$(4,0)_2 = -\frac{1}{6}e^4 + \frac{197}{768}e^6$$
$$(4,1)_2 = \frac{3}{32}e^6$$
$$(4,2)_2 = -\frac{1}{96}e^6$$

$$(6,0)_2 = -\frac{1}{46}e^6$$

$$(0,1)_3 = \frac{9}{16}e^3 - \frac{81}{256}e^5$$
$$(0,2)_3 = \frac{1}{2}e^3 + \frac{7}{16}e^5$$
$$(0,3)_3 = \frac{1}{8}e^3 + \frac{75}{64}e^5$$
$$(0,4)_3 = \frac{3}{4}e^5$$
$$(0,5)_3 = \frac{5}{32}e^5$$

$$(2,0)_3 = -\frac{5}{8}e^3 + \frac{81}{96}e^5$$
$$(2,1)_3 = -\frac{1}{4}e^3 + \frac{223}{256}e^5$$
$$(2,2)_3 = \frac{3}{32}e^5$$
$$(2,3)_3 = -\frac{1}{16}e^5$$

$$(4,0)_3 = -\frac{5}{16}e^5$$
$$(4,1)_3 = -\frac{1}{16}e^5$$

$$(1,0)_3 = \frac{13}{24}e^3 - \frac{43}{128}e^5$$
$$(1,1)_3 = \frac{13}{16}e^3 - \frac{25}{32}e^5$$
$$(1,2)_3 = \frac{1}{4}e^3 + \frac{23}{96}e^5$$
$$(1,3)_3 = \frac{39}{64}e^5$$
$$(1,4)_3 = \frac{3}{16}e^5$$

$$(1,0)_2 = \frac{5}{8}e^2 - \frac{11}{48}e^4 + \frac{17}{384}e^6$$
$$(1,1)_2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{12}e^4 + \frac{23}{384}e^6$$
$$(1,2)_2 = \frac{5}{16}e^4 - \frac{67}{768}e^6$$
$$(1,3)_2 = \frac{1}{4}e^4 + \frac{17}{64}e^6$$
$$(1,4)_2 = \frac{57}{128}e^6$$
$$(1,5)_2 = \frac{5}{32}e^6$$

$$(3,0)_2 = \frac{5}{8}e^4 - \frac{593}{3072}e^6$$
$$(3,1)_2 = \frac{1}{6}e^4 - \frac{71}{768}e^6$$
$$(3,2)_2 = \frac{29}{192}e^6$$
$$(3,3)_2 = \frac{1}{16}e^6$$

$$(5,0)_2 = \frac{25}{192}e^6$$
$$(5,1)_2 = \frac{1}{48}e^6$$

$$(3,0)_3 = -\frac{1}{6}e^3 + \frac{307}{384}e^5$$
$$(3,1)_3 = \frac{13}{32}e^5$$
$$(3,2)_3 = \frac{1}{24}e^5$$

$$(5,0)_3 = -\frac{1}{24}e^5$$

$$(0,1)_4 = \frac{2}{3}e^4 - \frac{8}{15}e^6$$
$$(0,2)_4 = \frac{13}{16}e^4 + \frac{25}{96}e^6$$
$$(0,3)_4 = \frac{3}{8}e^4 + \frac{13}{8}e^6$$
$$(0,4)_4 = \frac{1}{16}e^4 + \frac{25}{16}e^6$$
$$(0,5)_4 = \frac{5}{8}e^6$$
$$(0,6)_4 = \frac{3}{32}e^6$$

$$(2,0)_4 = -\frac{283}{384}e^4 + \frac{2147}{1920}e^6$$
$$(2,1)_4 = -\frac{9}{16}e^4 + \frac{35}{24}e^6$$

$$(0,1)_5 = \frac{625}{768}e^5$$
$$(0,2)_5 = \frac{59}{48}e^5$$
$$(0,3)_5 = \frac{51}{64}e^5$$
$$(0,4)_5 = \frac{1}{4}e^5$$
$$(0,5)_5 = \frac{1}{32}e^5$$

$$(2,0)_5 = -\frac{7}{8}e^5$$
$$(2,1)_5 = -\frac{739}{768}e^5$$
$$(2,2)_5 = -\frac{13}{32}e^5$$
$$(2,3)_5 = -\frac{1}{16}e^5$$

$$(0,1)_6 = \frac{81}{80}e^6$$
$$(0,2)_6 = \frac{115}{64}e^6$$
$$(0,3)_6 = \frac{47}{32}e^6$$
$$(0,4)_6 = \frac{21}{32}e^6$$
$$(0,5)_6 = \frac{5}{32}e^6$$
$$(0,6)_6 = \frac{1}{64}e^6$$

$$(2,0)_6 = -\frac{24269}{23040}e^6$$
$$(2,1)_6 = -\frac{1145}{768}e^6$$
$$(2,2)_6 = -\frac{1387}{1536}e^6$$

$$(2,2)_4 = -\frac{1}{8}e^4 + \frac{277}{768}e^6$$
$$(2,3)_4 = -\frac{5}{32}e^6$$
$$(2,4)_4 = -\frac{1}{16}e^6$$

$$(4,0)_4 = \frac{1}{24}e^4 - \frac{187}{384}e^6$$
$$(4,1)_4 = -\frac{3}{16}e^6$$
$$(4,2)_4 = -\frac{1}{48}e^6$$

$$(6,0)_4 = \frac{1}{120}e^6$$

$$(1,0)_4 = \frac{103}{192}e^4 - \frac{451}{960}e^6$$
$$(1,1)_4 = \frac{55}{48}e^4 - \frac{641}{480}e^6$$
$$(1,2)_4 = \frac{21}{32}e^4 - \frac{23}{384}e^6$$
$$(1,3)_4 = \frac{1}{8}e^4 + \frac{33}{32}e^6$$
$$(1,4)_4 = \frac{21}{32}e^6$$
$$(1,5)_4 = \frac{1}{8}e^6$$

$$(3,0)_4 = -\frac{5}{16}e^4 + \frac{205}{192}e^5$$
$$(3,1)_4 = -\frac{1}{12}e^4 + \frac{37}{48}e^6$$
$$(3,2)_4 = \frac{1}{6}e^6$$
$$(3,3)_4 = 0\,e^6$$

$$(5,0)_4 = -\frac{5}{48}e^6$$
$$(5,1)_4 = -\frac{1}{60}e^6$$

$$(4,0)_5 = \frac{5}{48}e^5$$
$$(4,1)_5 = \frac{1}{48}e^5$$

$$(1,0)_5 = \frac{1097}{1920}e^5$$
$$(1,1)_5 = \frac{299}{192}e^5$$
$$(1,2)_5 = \frac{121}{96}e^5$$
$$(1,3)_5 = \frac{29}{64}e^5$$
$$(1,4)_5 = \frac{1}{16}e^5$$

$$(3,0)_5 = -\frac{179}{384}e^5$$
$$(3,1)_5 = -\frac{23}{96}e^5$$
$$(3,2)_5 = -\frac{1}{24}e^5$$

$$(5,0)_5 = \frac{1}{120}e^5$$

$$(2,3)_6 = -\frac{17}{64}e^6$$
$$(2,4)_6 = -\frac{1}{32}e^6$$

$$(4,0)_6 = \frac{433}{2304}e^6$$
$$(4,1)_6 = \frac{7}{96}e^6$$
$$(4,2)_6 = \frac{1}{96}e^6$$

$$(6,0)_6 = -\frac{1}{720}e^6$$

$$(1,0)_6 = \frac{1223}{1920}e^6$$
$$(1,1)_6 = \frac{1337}{640}e^6$$
$$(1,2)_6 = \frac{1645}{768}e^6$$
$$(1,3)_6 = \frac{211}{192}e^6$$
$$(1,4)_6 = \frac{37}{128}e^6$$
$$(1,5)_6 = \frac{1}{32}e^6$$

$$(3,0)_6 = -\frac{663}{1024}e^6$$
$$(3,1)_6 = -\frac{371}{768}e^6$$
$$(3,2)_6 = -\frac{31}{192}e^6$$
$$(3,3)_6 = -\frac{1}{48}e^6$$

$$(5,0)_6 = \frac{5}{192}e^6$$
$$(5,1)_6 = \frac{1}{240}e^6$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen des vorhergehenden Artikels kann man die Gröfsen $\frac{a^n}{r^n} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} mf$ für jeden beliebigen Werth von n und m bis auf Gröfsen von der Ordnung e^7 genau entwickeln. Die Anwendung dieser Ausdrücke kann auf verschiedene Arten bewerkstelligt werden. Entweder man substituirt sie, so wie sie sind, in die Ausdrücke des vorhergehenden Artikels, indem man n und m nach und nach alle Werthe beilegt, die nothwendig sind; hiedurch bekommt man $\frac{a^n}{r^n} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} mf$ explicite durch die Excentricität ausgedrückt, und kann den numerischen Werth dieser in jedem speciellen Falle substituiren. Oder man substituirt in jedem speciellen Falle sogleich den numerischen Werth der Excentricität des Planeten in die vorstehenden Ausdrücke, und dann diese in die Ausdrücke des vorhergehenden Artikels. Oder man substituirt die vorstehenden Ausdrücke unmittelbar in die Gleichungen des vorhergehenden Artikels für $(0)_{n,\nu}$, $(1)_{n,\nu}$, etc., und dann in jedem speciellen Falle den numerischen Werth der Excentricität des Planeten in diese. Dieser Weg ist den anderen jeden Falls vorzuziehen, wenn n eine grofse Zahl ist, weil alsdann viele Werthe von m mit demselben verbunden werden müssen, und man durch dieses Verfahren Einen Ausdruck erhält, der alle Werthe von m umfafst. Wenn n eine kleine Zahl ist, ist der Vortheil dieses Verfahrens nicht entschieden, es gewährt aber jeden Falls eine bequeme und übersichtliche Rechnung, und daher habe ich es für alle Werthe von n angewandt.

15.

Wenn man die Substitutionen nicht weiter fortsetzt, als für die Berechnung der Saturnstörungen des Enckeschen Kometen nöthig ist, so kann man die fünfte und höheren Potenzen der Excentricität unbedenklich weglassen, und braucht n nicht gröfser wie 7 anzunehmen. Es ergaben sich unter diesen Annahmen folgende Ausdrücke:

$$(0)_{3,0} = \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4$$

$$(2)_{3,0} = e^2 + \frac{81}{64}e^4$$

$$(4)_{3,0} = \frac{1}{4}e^4$$

$$(0)_{3,1} = \frac{3}{2}e + \frac{27}{16}e^3$$

$$(2)_{3,1} = \frac{11}{8}e^3$$

$$(1)_{3,1} = e + \frac{1}{16}e^3$$

$$(3)_{3,1} = \frac{1}{2}e^3$$

$$
\begin{aligned}
(0)_{3,2} &= \tfrac{9}{4} e^2 + \tfrac{7}{4} e^4 \\
(2)_{3,2} &= -\tfrac{1}{2} e^2 + \tfrac{13}{6} e^4 \\
(4)_{3,2} &= -\tfrac{1}{6} e^4 \\
(1)_{3,2} &= \tfrac{17}{8} e^2 - \tfrac{7}{24} e^4 \\
(3)_{3,2} &= \tfrac{9}{8} e^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0)_{4,2} &= \tfrac{7}{2} e^2 + \tfrac{67}{12} e^4 \\
(2)_{4,2} &= -\tfrac{1}{2} e^2 + \tfrac{8}{3} e^4 \\
(4)_{4,2} &= -\tfrac{1}{6} e^4 \\
(1)_{4,2} &= \tfrac{21}{8} e^2 + \tfrac{47}{48} e^4 \\
(3)_{4,2} &= \tfrac{31}{24} e^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0)_{3,3} &= \tfrac{53}{16} e^3 \\
(2)_{3,3} &= -\tfrac{11}{8} e^3 \\
(1)_{3,3} &= \tfrac{179}{48} e^3 \\
(3)_{3,3} &= -\tfrac{1}{6} e^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0)_{4,3} &= \tfrac{23}{4} e^3 \\
(2)_{4,3} &= -\tfrac{13}{8} e^3 \\
(1)_{4,3} &= \tfrac{127}{24} e^3 \\
(3)_{4,3} &= -\tfrac{1}{6} e^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0)_{3,4} &= \tfrac{77}{16} e^4 \\
(2)_{3,4} &= -\tfrac{1075}{384} e^4 \\
(4)_{3,4} &= \tfrac{1}{24} e^4 \\
(1)_{3,4} &= \tfrac{1165}{192} e^4 \\
(3)_{3,4} &= -\tfrac{9}{16} e^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0)_{4,4} &= \tfrac{437}{48} e^4 \\
(2)_{4,4} &= -\tfrac{1435}{384} e^4 \\
(4)_{4,4} &= \tfrac{1}{24} e^4 \\
(1)_{4,4} &= \tfrac{1835}{192} e^4 \\
(3)_{4,4} &= -\tfrac{31}{48} e^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0)_{4,0} &= 3e^2 + \tfrac{45}{8} e^4 \\
(2)_{4,0} &= e^2 + \tfrac{137}{64} e^4 \\
(4)_{4,0} &= \tfrac{1}{4} e^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0)_{5,0} &= 5e^2 + \tfrac{105}{8} e^4 \\
(2)_{5,0} &= e^2 + \tfrac{209}{64} e^4 \\
(4)_{5,0} &= \tfrac{1}{4} e^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0)_{4,1} &= 2e + \tfrac{17}{4} e^3 \\
(2)_{4,1} &= \tfrac{13}{8} e^3 \\
(1)_{4,1} &= e + \tfrac{5}{8} e^3 \\
(3)_{4,1} &= \tfrac{1}{2} e^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0)_{5,1} &= \tfrac{5}{2} e + \tfrac{135}{16} e^3 \\
(2)_{5,1} &= \tfrac{15}{8} e^3 \\
(1)_{5,1} &= e + \tfrac{23}{16} e^3 \\
(3)_{5,1} &= \tfrac{1}{2} e^3
\end{aligned}
$$

$$(0)_{5,2} = 5e^2 + \frac{155}{12}e^4$$
$$(2)_{5,2} = -\frac{1}{2}e^2 + \frac{19}{6}e^4$$
$$(4)_{5,2} = -\frac{1}{6}e^4$$
$$(1)_{5,2} = \frac{25}{8}e^2 + \frac{159}{48}e^4$$
$$(3)_{5,2} = \frac{35}{24}e^4$$

$$(0)_{5,3} = \frac{145}{16}e^3$$
$$(2)_{5,3} = -\frac{15}{8}e^3$$
$$(1)_{5,3} = \frac{341}{48}e^3$$
$$(3)_{5,3} = -\frac{1}{6}e^3$$

$$(0)_{5,4} = \frac{745}{48}e^4$$
$$(2)_{5,4} = -\frac{1843}{384}e^4$$
$$(4)_{5,4} = \frac{1}{24}e^4$$
$$(1)_{5,4} = \frac{2703}{192}e^4$$
$$(3)_{5,4} = -\frac{35}{48}e^4$$

$$(0)_{6,0} = \frac{15}{2}e^2 + \frac{105}{4}e^4$$
$$(2)_{6,0} = e^2 + \frac{297}{64}e^4$$
$$(4)_{6,0} = \frac{1}{4}e^4$$

$$(0)_{6,1} = 3e + \frac{117}{8}e^3$$
$$(2)_{6,1} = \frac{17}{8}e^3$$
$$(1)_{6,1} = e + \frac{5}{2}e^3$$
$$(3)_{6,1} = \frac{1}{2}e^3$$

$$(0)_{6,2} = \frac{27}{4}e^2 + \frac{101}{4}e^4$$
$$(2)_{6,2} = -\frac{1}{2}e^2 + \frac{11}{3}e^4$$
$$(4)_{6,2} = -\frac{1}{6}e^4$$
$$(1)_{6,2} = \frac{29}{8}e^2 + \frac{257}{48}e^4$$
$$(3)_{6,2} = \frac{13}{8}e^4$$

$$(0)_{6,3} = \frac{107}{8}e^3$$
$$(2)_{6,3} = -\frac{17}{8}e^3$$
$$(1)_{6,3} = \frac{55}{6}e^3$$
$$(3)_{6,3} = -\frac{1}{6}e^3$$

$$(0)_{6,4} = \frac{197}{8}e^4$$
$$(2)_{6,4} = -\frac{2299}{384}e^4$$
$$(4)_{6,4} = \frac{1}{24}e^4$$
$$(1)_{6,4} = \frac{3793}{192}e^4$$
$$(3)_{6,4} = -\frac{13}{16}e^4$$

$$(0)_{7,0} = \frac{21}{2}e^2 + \frac{189}{4}e^4$$
$$(2)_{7,0} = e^2 + \frac{401}{64}e^4$$
$$(4)_{7,0} = \frac{1}{4}e^4$$

$$(0)_{7,1} = \frac{7}{2}e + \frac{371}{16}e^3$$
$$(2)_{7,1} = \frac{19}{8}e^3$$
$$(1)_{7,1} = e + \frac{61}{16}e^3$$
$$(3)_{7,1} = \frac{1}{2}e^3$$

$$(0)_{7,2} = \frac{35}{4} e^2 + \frac{133}{3} e^4$$
$$(2)_{7,2} = -\frac{1}{2} e^2 + \frac{25}{6} e^4$$
$$(4)_{7,2} = \frac{1}{6} e^4$$
$$(1)_{7,2} = \frac{33}{8} e^2 + \frac{73}{6} e^4$$
$$(3)_{7,2} = \frac{43}{24} e^4$$

$$(0)_{7,3} = \frac{301}{16} e^3$$
$$(2)_{7,3} = -\frac{19}{8} e^3$$
$$(1)_{7,3} = \frac{551}{48} e^3$$
$$(3)_{7,3} = -\frac{1}{6} e^3$$

$$(0)_{7,4} = \frac{889}{24} e^4$$
$$(2)_{7,4} = -\frac{2803}{384} e^4$$
$$(4)_{7,4} = \frac{1}{24} e^4$$
$$(1)_{7,4} = \frac{5129}{192} e^4$$
$$(3)_{7,4} = -\frac{43}{48} e^4$$

16.

Man wird weiter unten sehen, dafs wir für die Berechnung der Störungen der Länge und des Radius Vectors die Gröfsen $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$ und $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$ brauchen. Es ergiebt sich aber aus dem Art. 10.

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) = \Sigma(1-e^2)^{\frac{l}{2}}\, k \sin{}^l u\, (\cos u - e)^{k-1}\, C_{k,l}$$
$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) = \Sigma(1-e^2)^{\frac{l-1}{2}}\, l \sin{}^{l-1} u\, (\cos u - e)^k\, C_{k,l}$$

Vor allen Dingen müssen die hier vorkommenden Functionen von u in Functionen der Vielfachen des Cosinus oder Sinus dieses Bogens entwickelt werden. Zu dem Ende werde ich zuerst die Relationen entwickeln, die zwischen den Coefficienten dieser Entwickelungen stattfinden. Hiebey sind zwei Fälle zu unterscheiden. Sey

1) wenn l eine grade Zahl ist

$$(\cos u - e)^k \sin{}^l u = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos u + 2\alpha_2 \cos 2u + \ldots + 2\alpha_{k+l} \cos (k+l) u$$

Bezeichnen wir hier das allgemeine Glied mit dem Index i, so haben wir durch ein bekanntes Theorem

(A) .... $$\alpha_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos u - e)^k \sin{}^l u \cos iu\, du$$

Sey

$$V = (\cos u - e)^{k+1} \sin{}^{l+1} u \cos (i-2) u$$

Diese Größe giebt durch die Differentiation sofort

$$dV = -(k+1)(\cos u - e)^k \sin^{l+1}u \cos(i-2)u \sin u\, du$$
$$+(l+1)(\cos u - e)^{k+1} \sin^l u \cos(i-2)u \cos u\, du$$
$$-(i-2)(\cos u - e)^{k+1} \sin^{l+1}u \sin(i-2)u\, du$$

Hieraus durch eine leichte Umstellung

$$dV = \tfrac{1}{4}\{k+l+i\}(\cos u - e)^k \sin^l u \cos iu\, du$$
$$-\tfrac{1}{2}e\{l+i-1\}(\cos u - e)^k \sin^l u \cos(i-1)u\, du$$
$$-\tfrac{1}{2}\{k-l\}(\cos u - e)^k \sin^l u \cos(i-2)u\, du$$
$$-\tfrac{1}{2}e\{l-i+3\}(\cos u - e)^k \sin^l u \cos(i-3)u\, du$$
$$+\tfrac{1}{4}\{k+l+4-i\}(\cos u - e)^k \sin^l u \cos(i-4)u\, du$$

Integrirt man diesen Ausdruck von 0 bis 2π, nimmt dabei auf die Gleichung (A) Rücksicht, und erwägt, daſs zwischen den angeführten Grenzen genommen $\int dV = 0$ ist, so erhält man

$$0 = (k+l+i)\alpha_i - 2e(l+i-1)\alpha_{i-1} - 2(k-l)\alpha_{i-2} - 2e(l-i+3)\alpha_{i-3} + (k+l-i+4)\alpha_{i-4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

welches die gesuchte Bedingungsgleichung ist. Um zu untersuchen, wie viele und welche der Coefficienten α_i gegeben seyn müssen, um durch Hülfe dieser Bedingungsgleichung die übrigen berechnen zu können, substituire ich die Werthe $i = 2$, $i = 3$, $i = 4$ in diese Gleichung, es ergiebt sich somit, wenn man bedenkt, daſs $\alpha_{-i} = \alpha_i$ ist,

$$(k+l+2)\alpha_2 = 2e(l+1)\alpha_1 + (k-l)\alpha_0$$
$$(k+l+3)\alpha_3 = 2e(l+2)\alpha_2 + (k-3l-1)\alpha_1 + 2el\alpha_0$$
$$(k+l+4)\alpha_4 = 2e(l+3)\alpha_3 + 2(k-l)\alpha_2 + 2e(l-1)\alpha_1 - (k+l)\alpha_0$$

woraus zu erkennen ist, daſs die Kenntniſs von α_0 und α_1 nothwendig und hinreichend ist, um durch die Gleichung (B) alle übrigen Coefficienten berechnen zu können. Um diese Coefficienten zu bestimmen, giebt uns der binomische Satz

$$(-1)^k(\cos u - e)^k = e^k - e^{k-1}k\cos u + e^{k-2}\frac{k.k-1}{1.2}\cos^2 u - e^{k-3}\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cos^3 u \pm \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

multipliciren wir diesen Ausdruck mit $\sin^l u$, und $\sin^l u \cos u$, integriren, und lassen dabei die Glieder weg, in welchen $\cos u$ auf ungrade Potenz erhoben vorkommt, weil die Integrale dieser gleich Null sind, so ergiebt sich

$$(-1)^k \alpha_0 = \frac{e^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^l u\, du + \frac{e^{k-2}}{2\pi}\frac{k.k-1}{1.2}\int_0^{2\pi} \sin^l u \cos^2 u\, du + \frac{e^{k-4}}{2\pi}\frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}\int_0^{2\pi} \sin^l u \cos^4 u\, du + \text{etc.}$$

$$(-1)^k \alpha_1 = -\frac{e^{k-1}}{2\pi} k\int_0^{2\pi} \sin^l u \cos^2 u\, du - \frac{e^{k-3}}{2\pi}\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\int_0^{2\pi} \sin^l u \cos^4 u\, du$$

$$-\frac{e^{k-5}}{2\pi}\frac{k.k-1.k-2.k-3.k-4}{1.2.3.4.5}\int_0^{2\pi} \sin^l u \cos^6 u\, du - \text{etc.}$$

Aber wenn p und q grade Zahlen sind, so ist bekanntlich

$$\text{(D)} \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^q u \cos^p u\, du = \frac{1.3.5\ldots p-1.1.3.5\ldots q-1}{2.4.6\ \ldots\ldots\ldots\ q+p}$$

Die Substitution dieses Ausdrucks in die vorstehenden giebt sogleich

$$(-1)^k \alpha_0 = \frac{1.3.5\ldots l-1}{2.4.6\ldots l} e^k + \frac{k.k-1}{1.2}\cdot\frac{1.1.3.5\ldots l-1}{2.4.6.8\ldots l+2} e^{k-2} + \frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3.1.3.5\ldots l-1}{2.4.6.8.10\ldots l+4} e^{k-4} + \text{etc.}$$

$$(-1)^k \alpha_1 = -k\frac{1.1.3\ldots l-1}{2.4.6\ldots l+2} e^{k-1} - \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l-1}{2.4.6.8\ldots l+4} e^{k-3} - \frac{k.k-1.k-2.k-3.k-4}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1.3.5.1.3\ldots l-1}{2.4.6.8.10\ldots l+4} e^{k-5} - \text{etc.}$$

Durch diese beiden Gleichungen und die Gleichung (B) lassen sich alle Entwickelungscoefficienten berechnen. Man kann andererseits aus den eben entwickelten Gleichungen den allgemeinen Ausdruck für α_l ableiten, und diesen zur Controle der Rechnung anwenden. Wenn man die beiden folgenden, bekannten Gleichungen

a) wenn i eine grade Zahl ist

$$\cos iu = 1 - \frac{i^2}{2}\sin^2 u + \frac{i^2.i^2-4}{2.3.4}\sin^4 u - \frac{i^2.i^2-4.i^2-16}{2.3.4.5.6}\sin^6 u \pm \text{etc.}$$

b) wenn i eine ungrade Zahl ist

$$\cos iu = \cos u - \frac{i^2-1}{2}\sin^2 u \cos u + \frac{i^2-1.i^2-9}{2.3.4}\sin^4 u \cos u - \frac{i^2-1.i^2-9.i^2-25}{2.3.4.5.6}\sin^6 u \cos u \pm \text{etc.}$$

mit der Entwickelung (C) verbindet, so bekommt man ohne Mühe

a) wenn i eine grade Zahl ist

$$(-1)^k \alpha_l = \frac{1.3\ldots l-1}{2.4\ldots l} e^k \left\{1 - \frac{i^2}{2}\cdot\frac{l+1}{l+2}\left\{1 - \frac{i^2-4}{3.4}\cdot\frac{l+3}{l+4}\left\{1 - \frac{i^2-16}{5.6}\cdot\frac{l+5}{l+6}\left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$+ \frac{k.k-1}{1.2}\cdot\frac{1.1.3\ldots l-1}{2.4.6\ldots l+2} e^{k-2}\left\{1 - \frac{i^2}{2}\cdot\frac{l+1}{l+4}\left\{1 - \frac{i^2-4}{3.4}\cdot\frac{l+2}{l+6}\left\{1 - \frac{i^2-16}{5.6}\cdot\frac{l+5}{l+8}\left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$+ \frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l-1}{2.4.6.8\ldots l+4} e^{k-4}\left\{1 - \frac{i^2}{2}\frac{l+1}{l+6}\left\{1 - \frac{i^2-4}{3.4}\cdot\frac{l+3}{l+8}\left\{1 - \frac{i^2-16}{5.6}\cdot\frac{l+5}{l+10}\left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$+ \text{etc.}$$

b) **wenn i eine ungrade Zahl ist**

$$(-1)^k \alpha_i = -k \frac{1.1.3\text{-}5 \ldots l-1}{2.4.6.8 \ldots l+2} e^{k-1} \left\{1 - \frac{i^2-1}{2} \cdot \frac{l+1}{l+4} \left\{1 - \frac{i^2-9}{3.4} \cdot \frac{l+3}{l+6} \left\{1 - \frac{i^2-25}{5.6} \cdot \frac{l+5}{l+8} \left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$-\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3} \cdot \frac{1.3.1.3 \ldots l-1}{2.4.6.8 \ldots l+4} e^{k-3} \left\{1 - \frac{i^2-1}{2} \cdot \frac{l+1}{l+6} \left\{1 - \frac{i^2-9}{3.4} \cdot \frac{l+3}{l+8} \left\{1 - \frac{i^2-25}{5.6} \cdot \frac{l+5}{l+10} \left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$-\frac{k.k-1.k-2.k-3.k-4}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{1.3.5.1.3 \ldots l-1}{2.4.6.8.10 \ldots l+6} e^{k-5} \left\{1 - \frac{i^2-1}{2} \cdot \frac{l+1}{l+8} \left\{1 - \frac{i^2-9}{3.4} \cdot \frac{l+3}{l+10} \left\{1 - \frac{i^2-25}{5.6} \cdot \frac{l+5}{l+12} \left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$+ \text{etc.}$$

Sey

2) **wenn l eine ungrade Zahl ist**

$$(\cos u - e)^k \sin^l u = 2\beta_1 \sin u + 2\beta_2 \sin 2u + \ldots 2\beta_{k+l} \sin (k+l) u$$

Wir haben jetzt

$$\beta_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos u - e)^k \sin^l u \sin iu \, du$$

und wenn wir nun

$$V = (\cos u - e)^{k+1} \sin^{l+1} u \sin (i-2) u$$

machen, und diese Gröſse derselben Behandlung unterworfen wie im vorhergehenden Falle, so kommen wir auf dieselbe Gleichung wie dort, nemlich

$$0 = (k+l+i)\beta_i - 2e(l+i-1)\beta_{i-1} - 2(k-l)\beta_{i-2} - 2e(l-i+3)\beta_{i-3} + (k+l-i+4)\beta_{i-4} \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{E})$$

Da jetzt $\beta_{-i} = -\beta_i$ und $\beta_0 = 0$ ist, so werden die hieraus entstehenden speciellen Relationen für die Anfangswerthe von i etwas anders wie im vorhergehenden Falle. Die Substitution $i = 2$ giebt eine identische Gleichung, und die von $i = 3$, und $i = 4$ giebt folgende

$$(k+l+3)\beta_3 = 2e(l+2)\beta_2 + (3k-l+1)\beta_1$$
$$(k+l+4)\beta_4 = 2e(l+3)\beta_3 + 2(k-l)\beta_2 + 2e(l-1)\beta_1$$

woraus sich ergiebt, daſs wir nur der Coefficienten β_1 und β_2 bedürfen, um durch die Relation (E) alle übrigen berechnen zu können. Die Entwickelung (C) giebt uns für diese Coefficienten zuerst folgende Ausdrücke

$$(-1)^k \beta_1 = \frac{e^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{l+1} u \, du + \frac{e^{k-2}}{2\pi} \cdot \frac{k.k-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{l+1} u \cos^2 u \, du + \text{etc.}$$

$$(-1)^k \beta_2 = -2 \frac{e^{k-1}}{2\pi} k \int_0^{2\pi} \sin^{l+1} u \cos^2 u \, du - 2 \frac{e^{k-3}}{2\pi} \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3} \int_0^{2\pi} \sin^{l+1} u \cos^4 u \, du - \text{etc.}$$

worauf wir, da $l+1$ eine grade Zahl ist, die Gleichung (D) anwenden können. Wir bekommen somit

$$(-1)^k\beta_1 = \frac{1.3.5\ldots l}{2.4.6\ldots l+1}e^k + \frac{k.k-1}{1.2}\cdot\frac{1.1.3.5\ldots l}{2.4.6.8\ldots l+3}e^{k-2} + \frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3.1.3.5\ldots l}{2.4.6\ldots l+5}e^{k-4} + \text{etc.}$$

$$(-1)^k\beta_2 = -2k\frac{1.1.3\ldots l}{2.4.6\ldots l+3}e^{k-1} - 2\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l}{2.4.6.8\ldots l+5}e^{k-3} - 2\frac{k.k-1.k-2.k-3.k-4}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1.3.5.1.3\ldots l}{2.4.6.8.10\ldots l+7}e^{k-5} - \text{etc.}$$

Um den Ausdruck für β_i zu finden, dienen die beiden Gleichungen

a) wenn i eine ungrade Zahl ist

$$\sin iu = i\sin u - \frac{i.i^2-1}{2.3}\sin^3 u + \frac{i.i^2-1.i^2-9}{2.3.4.5}\sin^5 u - \frac{i.i^2-1.i^2-9.i^2-25}{2.3.4.5.6.7}\sin^7 u \pm \text{etc.}$$

b) wenn i eine grade Zahl ist

$$\sin iu = i\sin u\cos u - \frac{i.i^2-4}{2.3}\sin^3 u\cos u + \frac{i.i^2-4.i^2-16}{2.3.4.5}\sin^5 u\cos u - \frac{i.i^2-4.i^2-16.i^2-36}{2.3.4.5.6.7}\sin^7 u\cos u \pm \text{etc.}$$

woraus sich ergiebt

a) wenn i eine ungrade Zahl ist

$$\begin{aligned}(-1)^k\beta_i = {} & i\frac{1.3\ldots l}{2.4\ldots l+1}e^k\left\{1-\frac{i^2-1}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+3}\left\{1-\frac{i^2-9}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+5}\left\{1-\frac{i^2-25}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+7}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\} \\ & + i\frac{k.k-1}{1.2}\cdot\frac{1.1.3\ldots l}{2.4.6\ldots l+3}e^{k-2}\left\{1-\frac{i^2-1}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+5}\left\{1-\frac{i^2-9}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+7}\left\{1-\frac{i^2-25}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+9}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\} \\ & + i\frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l}{2.4.6.8\ldots l+5}e^{k-4}\left\{1-\frac{i^2-1}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+7}\left\{1-\frac{i^2-9}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+9}\left\{1-\frac{i^2-25}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+11}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\} \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

b) wenn i eine grade Zahl ist

$$\begin{aligned}(-1)^k\beta_i = {} & -ik\frac{1.1.3\ldots l}{2.4.6\ldots l+3}e^{k-1}\left\{1-\frac{i^2-4}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+5}\left\{1-\frac{i^2-16}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+7}\left\{1-\frac{i^2-36}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+9}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\} \\ & - i\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l}{2.4.6.8\ldots l+5}e^{k-3}\left\{1-\frac{i^2-4}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+7}\left\{1-\frac{i^2-16}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+9}\left\{1-\frac{i^2-36}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+11}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\} \\ & - i\frac{k.k-1.k-3.k-4}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1.3.5.1.3\ldots l}{2.4.6.8.10\ldots l+7}e^{k-5}\left\{1-\frac{i^2-4}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+9}\left\{1-\frac{i^2-16}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+11}\left\{1-\frac{i^2-36}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+13}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\} \\ & - \text{etc.}\end{aligned}$$

17.

Durch die im vorhergehenden Artikel entwickelten Ausdrücke kann man die in Rede stehenden Entwickelungscoefficienten α_i und β_i immer sicher berechnen. Ich kann aber demohngeachtet ein anderes Verfahren nicht mit Stillschweigen übergehen, welches eben so einfach oder vielleicht einfacher noch zu demselben Ziele führt. Es besteht dieses darin, daſs man die Entwickelungscoefficienten, die den Exponenten $k+1$ und l, so wie die, welche den Exponenten k und $l+1$ angehören, aus denen die den Exponenten k und l zukommen berechnet. Wenn man nun ursprünglich einmal $k=1$ und $l=0$, und einmal $k=0$ und $l=1$ so kann man auf diese Art alle Entwickelungscoefficienten successive aus den Gröſsen $\cos u-e$ und $\sin u$ berechnen. Ich nehme an, daſs man für irgend welche Werthe der Exponenten k und l, die ich resp. p und q nennen will, gefunden habe

$$(\cos u-e)^p \sin^q u = [0]+2[1]\cos u+2[2]\cos 2u+\ldots+2[p+q-1]\cos(p+q-1)u$$
$$+2[p+q]\cos(p+q)u$$

dann ist

$$(\cos u-e)^p \sin^{q+1} u = \{[0]-[2]\}\sin u+\{[1]-[3]\}\sin 2u+\{[2]-[4]\}\sin 3u+\ldots$$
$$+\{[p+q-2]-[p+q]\}\sin(p+q-1)u+[p+q-1]\sin(p+q)u$$
$$+[p+q]\sin(p+q+1)u$$

$$(\cos u-e)^{p+1} \sin^q u = \{[1]-[0]e\}+\{[2]+[0]-2[1]e\}\cos u+\{[3]+[1]-2[2]e\}\cos 2u+\ldots$$
$$+\{[p+q]+[p+q-2]-2[p+q-1]e\}\cos(p+q-1)u$$
$$+\{[p+q-1]-2[p+q]e\}\cos(p+q)u+[p+q]\cos(p+q+1)u$$

War

$$(\cos u-e)^p \sin^q u = 2[1]\sin u+2[2]\sin 2u+\ldots+2[p+q-1]\sin(p+q-1)u$$
$$+2[p+q]\sin(p+q)u$$

dann wird

$$(\cos u-e)^p \sin^{q+1} u = [1]+[2]\cos u+\{[3]-[1]\}\cos 2u+\{[4]-[2]\}\cos 3u+\ldots.$$
$$+\{[p+q]-[p+q-2]\}\cos(p+q-1)u-[p+q-1]\cos(p+q)u$$
$$-[p+q]\cos(p+q+1)u$$

$$(\cos u-e)^{p+1} \sin^q u = \{[2]-2[1]e\}\sin u+\{[3]+[1]-2[2]e\}\sin 2u+\{[4]+[2]-2[3]e\}\sin 3u\ldots$$
$$+\{[p+q]+[p+q-2]-2[p+q-1]e\}\sin(p+q-1)u$$
$$+\{[p+q-1]-2[p+q]e\}\sin(p+q)u+[p+q]\sin(p+q+1)u$$

Bei Anwendung dieses Verfahrens pflanzt ein begangener Rechnungsfehler sich auf die fernerhin zu berechnenden Gröfsen fort, und macht alle fehlerhaft. Um dieses zu entdecken oder diesem vorzubeugen ist dienlich, entweder von Zeit zu Zeit die berechneten Coefficienten durch die Bedingungsgleichungen (B) und (E) des vorhergehenden Artikels zu prüfen, oder durch die dort entwickelten Ausdrücke eine gewisse Anzahl von Coefficienten direct zu berechnen, wodurch man feste Vergleichungspunkte erlangt, die über die Richtigkeit der Rechnung entscheiden können.

18.

Setzt man nun

$$U_{k,l} = (\cos u - e)^k \sin^l u$$

und substituirt in die rechte Seite dieser Gleichung die nach Anleitung des Vorhergehenden berechnete Entwickelung derselben, dann ergeben sich nach Art. 16.

$$(A) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) &= \Sigma(1-e^2)^{\frac{l}{2}}\, kU_{k-1,\,l}\, C_{k,l} \\ \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) &= \Sigma(1-e^2)^{\frac{l-1}{2}}\, lU_{k,\,l-1}\, C_{k,l} \end{aligned} \right.$$

welche Ausdrücke die Form

$$\Sigma\{\gamma + \gamma_1 \cos u + \gamma_2 \cos 2u + \text{etc.}\}\, C_{k,l}$$

und resp.

$$\Sigma\{\delta_1 \sin u + \delta_2 \sin 2u + \text{etc.}\}\, C_{k,l}$$

haben. Hat man nun den numerischen Werth der Excentricität der Kometenbahn in die Ausdrücke der Coefficienten γ, γ_1 etc. δ_1, δ_2, etc. substituirt, dann multiplicirt man diese Coefficienten mit den nach Angabe der Artt. 13. 14 und 15. berechneten Coefficienten der Gröfsen $C_{k,l}$. Hiedurch nehmen die angeführten Differentialquotienten von Ω folgende Form an:

$$(B) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} &\Sigma\{\lambda + \lambda_1 \cos u + \lambda_2 \cos 2u + \text{etc.}\}\cos i' g' \\ &+ \Sigma\{\nu_1 \sin u + \nu_2 \sin 2u + \text{etc.}\}\cos i' g' \\ &+ \Sigma\{\varrho + \varrho_1 \cos u + \varrho_2 \cos 2u + \text{etc.}\}\sin i' g' \\ &+ \Sigma\{\sigma_1 \sin u + \sigma_2 \sin 2u + \text{etc.}\}\sin i' g' \end{aligned} \right.$$

wo λ, λ_1, etc. etc. numerische Coefficienten sind. Diesen Ausdruck verwandelt man in folgenden:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\left\{\begin{array}{l}\text{etc.} + \tfrac{1}{2}(\varrho_2-\nu_2)\sin(-2u+i'g')+\tfrac{1}{2}(\varrho_1-\nu_1)\sin(-u+i'g') \\ \quad +\varrho\sin i'g'+\tfrac{1}{2}(\varrho_1+\nu_1)\sin(u+i'g')+\tfrac{1}{2}(\varrho_2+\nu_2)\sin(2u+i'g')+\text{etc.}\end{array}\right\} \\ +\Sigma\left\{\begin{array}{l}\text{etc.} + \tfrac{1}{2}(\lambda_2+\sigma_2)\cos(-2u+i'g')+\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\sigma_1)\cos(-u+i'g') \\ \quad +\lambda\cos i'g'+\tfrac{1}{2}(\lambda_1-\sigma_1)\cos(u+i'g')+\tfrac{1}{2}(\lambda_2-\sigma_2)\cos(2u+i'g')+\text{etc.}\end{array}\right\}\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

wodurch die im Art. 11. verlangte Form erlangt ist.

19.

Für die Berechnung der Saturnstörungen des Enckeschen Kometen habe ich die Gröfsen $U_{k,l}$ bis zu $k+l=5$ incl. gebraucht und gefunden:

$$U_{1,0} = -e + \cos u$$

$$U_{0,1} = \sin u$$

$$U_{2,0} = \left(\frac{1}{2}+e^2\right) - 2e\cos u + \frac{1}{2}\cos 2u$$

$$U_{1,1} = -e\sin u + \frac{1}{2}\sin 2u$$

$$U_{0,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2u$$

$$U_{3,0} = -\left(\frac{3}{2}e+e^3\right) + \left(\frac{3}{4}+3e^2\right)\cos u - \frac{3}{2}e\cos 2u + \frac{1}{4}\cos 3u$$

$$U_{2,1} = \left(\frac{1}{4}+e^2\right)\sin u - e\sin 2u + \frac{1}{4}\sin 3u$$

$$U_{1,2} = -\frac{1}{2}e + \frac{1}{4}\cos u + \frac{1}{2}e\cos 2u - \frac{1}{4}\cos 3u$$

$$U_{0,3} = \frac{3}{4}\sin u - \frac{1}{4}\sin 3u$$

$$U_{4,0} = \left(\frac{3}{8}+3e^2+e^4\right) - \left(3e+4e^3\right)\cos u + \left(\frac{1}{2}+3e^2\right)\cos 2u - e\cos 3u + \frac{1}{8}\cos 4u$$

$$U_{3,1} = -\left(\frac{3}{4}e+e^3\right)\sin u + \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}e^2\right)\sin 2u - \frac{3}{4}e\sin 3u + \frac{1}{8}\sin 4u$$

$$U_{2,2} = \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}e^2\right) - \frac{1}{2}e\cos u - \frac{1}{2}e^2\cos 2u + \frac{1}{2}e\cos 3u - \frac{1}{8}\cos 4u$$

$$U_{1,3} = -\frac{3}{4}e\sin u + \frac{1}{4}\sin 2u + \frac{1}{4}e\sin 3u - \frac{1}{8}\sin 4u$$

$$U_{0,4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2u + \frac{1}{8}\cos 4u$$

$$U_{5,0} = -\left(\frac{15}{8}e + 5e^3 + e^5\right) + \left(\frac{5}{8} + \frac{15}{2}e^2 + 5e^4\right)\cos u - \left(\frac{5}{2}e + 5e^3\right)\cos 2u + \left(\frac{5}{16} + \frac{5}{2}e^2\right)\cos 3u - \frac{5}{8}e\cos 4u + \frac{1}{16}\cos 5u$$

$$U_{4,1} = \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{2}e^2 + e^4\right)\sin u - \left(e + 2e^3\right)\sin 2u + \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{2}e^2\right)\sin 3u - \frac{1}{2}e\sin 4u + \frac{1}{16}\sin 5u$$

$$U_{3,2} = -\left(\frac{3}{8}e + \frac{1}{2}e^3\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}e^2\right)\cos u + \frac{1}{2}e^3\cos 2u - \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4}e^2\right)\cos 3u + \frac{3}{8}e\cos 4u - \frac{1}{16}\cos 5u$$

$$U_{2,3} = \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}e^2\right)\sin u - \frac{1}{2}e\sin 2u + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}e^2\right)\sin 3u + \frac{1}{4}e\sin 4u - \frac{1}{16}\sin 5u$$

$$U_{1,4} = -\frac{3}{8}e + \frac{1}{8}\cos u + \frac{1}{2}e\cos 2u - \frac{3}{16}\cos 3u - \frac{1}{8}e\cos 4u + \frac{1}{16}\cos 5u$$

$$U_{0,5} = \frac{5}{8}\sin u - \frac{5}{16}\sin 3u + \frac{1}{16}\sin 5u$$

In Fällen wo man weiter gehen mufs, kann man hier anknüpfen, und die Entwickelungen so weit man will fortsetzen. Zu bemerken ist, dafs von jeder Gruppe, in welcher $k+l$ denselben Werth hat, die ersten Gröfsen $U_{k,l}$ nachher die gröfste Wirkung äufsern werden, denn zufolge der Ausdrücke (A) des vor. Art. werden die Gröfsen jeder Gruppe der Reihe nach mit

$$(1-e^2)^0,\ (1-e^2)^{\frac{1}{2}},\ (1-e^2),\ (1-e^2)^{\frac{3}{2}},\ (1-e^2)^2,\ \text{etc.}$$

multiplicirt, welche Factoren um so mehr abnehmen, je gröfser die Excentricität der Ellipse ist, die der Komet beschreibt.

20.

Es wird sich weiter unten zeigen, dafs wir zur Berechnung der Breitenstörungen vor allen Dingen die Gröfse

$$a\left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{\sin(f+N+K)}{r} + \frac{a}{2}\left[\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}I - \left(\frac{d\Omega}{dk}\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}I\right]\frac{\cos(f+N+K)}{r}$$

brauchen werden. Gleichwie $\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$ die resp. der grofsen und kleinen Achse der Kometenbahn parallelen Componenten der störenden Kraft sind, so ist die vorstehende Gröfse die Componente dieser Kraft, welche auf die Kometenbahn senkrecht ist. Ich werde sie daher im Folgenden mit $-\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$ bezeichnen. Diese wollen wir nun entwickeln, und die Entwickelung so einrichten, dafs von der vorhergehenden Entwickelung jener Gröfsen so viel wie möglich gebraucht werden kann.

Da die Gröfsen I, N und K blos in A und B vorkommen, so mufs Ω in Bezug auf diese differentiirt werden, aber auf diese Art würden wir nicht das einfachste Resultat erhalten. Zweckmäfsiger ist Ω nach H zu differentiiren.

Wir haben somit

$$\left(\frac{d\Omega}{ds}\right) = -a\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\left\{\left(\frac{dH}{dI}\right)\frac{\sin(f+N+K)}{r} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{dH}{d\nu}\right)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}I - \left(\frac{dH}{dk}\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}I\right]\frac{\cos(f+N+K)}{r}\right\}$$

Aber es ist zufolge des Art. 7.

$$H = \cos^2\tfrac{1}{2}I\cos(f-f'+2K) + \sin^2\tfrac{1}{2}I\cos(f+f'+2N)$$

also

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dH}{dI}\right) &= -\sin I\sin(f+N+K)\sin(f'+N-K)\\ \left(\frac{dH}{d\nu}\right) &= -2\sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(f+f'+2N)\\ \left(\frac{dH}{dk}\right) &= -2\cos^2\tfrac{1}{2}I\sin(f-f'+2K)\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (X)$$

und hiemit

$$\left(\frac{d\Omega}{ds}\right) = \frac{a}{r}\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\sin I\sin(f'+N-K)$$

Aber zufolge des Art. 8. haben wir

$$A = \cos^2\tfrac{1}{2}I\cos(f'-2K) + \sin^2\tfrac{1}{2}I\cos(f'+2N)$$
$$B = \cos^2\tfrac{1}{2}I\sin(f'-2K) - \sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(f'+2N)$$

Hieraus ergiebt sich

$$A\sin(N+K) + B\cos(N+K) = \cos I\sin(f'+N-K)$$

also

$$\left(\frac{d\Omega}{ds}\right) = \frac{a}{r}\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)A\operatorname{tg}I\sin(N+K) + \frac{a}{r}\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)B\operatorname{tg}I\cos(N+K)$$

Nehmen wir jetzt die Gröfse

$$X = (1 - 2A\xi - 2B\eta + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

des Art. 9. vor. Diese giebt uns

$$\frac{r'}{r}\left(\frac{dX}{dH}\right) = (1 - 2A\xi - 2B\eta + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$\left(\frac{dX}{d\xi}\right) = (A-\xi)(1 - 2A\xi - 2B\eta + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$\left(\frac{dX}{dA}\right) = \xi(1 - 2A\xi - 2B\eta + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Hieraus folgt

$$A\left(\frac{dX}{dH}\right)\frac{r'}{r} = \left(\frac{dX}{d\xi}\right) + \left(\frac{dX}{dA}\right)$$

und eben so ergiebt sich

$$B\left(\frac{dX}{dH}\right)\frac{r'}{r} = \left(\frac{dX}{d\eta}\right) + \left(\frac{dX}{dB}\right)$$

Hiedurch erhalten wir

$$\frac{r'}{r}\left(\frac{dX}{dH}\right) A \operatorname{tg} I \sin(N+K) + \frac{r'}{r}\left(\frac{dX}{dH}\right) B \operatorname{tg} I \cos(N+K) =$$
$$\left(\frac{dX}{d\xi}\right) \operatorname{tg} I \sin(N+K) + \left(\frac{dX}{d\eta}\right) \operatorname{tg} I \cos(N+K) + Y$$

wenn wir

$$Y = \left(\frac{dX}{dA}\right) \operatorname{tg} I \sin(N+K) + \left(\frac{dX}{dB}\right) \operatorname{tg} I \cos(N+K)$$

machen. Setzen wir ferner

(A) .... $$K_{k,l} = \left(\frac{dD_{k,l}}{dA}\right) \operatorname{tg} I \sin(N+K) + \left(\frac{dD_{k,l}}{dB}\right) \operatorname{tg} I \cos(N+K)$$

dann wird

$$Y = \Sigma \xi^k \eta^l K_{k,l}$$

und gehen wir nun von der Function X zur Störungsfunction Ω über, so ergiebt sich

(Z) .... $$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) \operatorname{tg} I \sin(N+K) + \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) \operatorname{tg} I \cos(N+K) + Z$$

wo

$$Z = \Sigma x^k y^l N_{k,l}$$

(B) .... $$N_{k,l} = \frac{m'}{M+m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+l+2} \cdot \left(\frac{a'}{r'}\right)^{k+l+2} \cdot K_{k,l}$$

und unter dem Summenzeichen in Z auch die Glieder inbegriffen sind, für welche $k+l=1$ ist. Die Entwickelung des Differentialquotienten nach z der Störungsfunction ist also hiemit auf die Entwickelung der Z genannten Function, und der Multiplication der Differentialquotienten nach x und y mit constanten Factoren hingeführt. Der Factor, womit $K_{k,l}$ multiplicirt wird, um $N_{k,l}$ zu geben, enthält die nemlichen Functionen von $\frac{a'}{r'}$, die bei der Entwickelung der Differentialquotienten nach x und y der Störungsfunction gebraucht wurden. Es ist also nur übrig, die Berechnung der Differentialquotienten nach A und B der Gröſsen $D_{k,l}$, die zur Berechnung von $K_{k,l}$ erfordert werden, zu zeigen.

21.

Der allgemeine Ausdruck für $D_{k,l}$, welcher im Art. 9. gegeben wurde, zeigt auf den ersten Anblick, daſs die Differentialquotienten dieser Gröſse nach A und B sich durch linearische Functionen der Gröſse selbst ausdrücken lassen. Sey daher

$$\begin{aligned}\left(\frac{dD_{k,l}}{dA}\right) = \alpha D_{k-1,l} &+ \beta\, D_{k-1,l-2} + \gamma\, D_{k-1,l-4} + \delta\, D_{k-1,l-6} + \text{etc.}\\ &+ \beta'\, D_{k-3,l} \quad + \gamma'\, D_{k-3,l-2} + \delta'\, D_{k-3,l-4} + \text{etc.}\\ &\qquad\qquad\quad + \gamma''\, D_{k-5,l} \quad + \delta''\, D_{k-5,l-2} + \text{etc.}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \delta'''\, D_{k-7,l} \quad + \text{etc.}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.}\end{aligned}$$

wo α, β, β', γ, etc. unbestimmte Coefficienten sind. Substituirt man in diese Gleichung die Werthe von $D_{k,l}$, $D_{k-1,l}$, $D_{k-1,l-2}$, etc. aus dem Art. 9., und vergleicht die Glieder, die mit gleichen Potenzen von A und B multiplicirt sind, so bekommt man für die Bestimmung der Coefficienten α, β, etc. zuerst folgende Gleichungen

$$\alpha = 2n-1$$

$$\beta = -\tfrac{1}{2}(2n-3)(2n-5)+\tfrac{1}{2}\alpha(2n-5)$$

$$\beta' = -\tfrac{1}{2}(2n-3)(2n-5)+\tfrac{1}{2}\alpha(2n-5)$$

$$\gamma = \tfrac{1}{4}\frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9)}{1\,.\,2}-\tfrac{1}{4}\alpha\frac{(2n-7)(2n-9)}{1\,.\,2}+\tfrac{1}{2}\beta(2n-9)$$

$$\gamma' = \tfrac{2}{4}\frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9)}{1\,.\,2}-\tfrac{2}{4}\alpha\frac{(2n-7)(2n-9)}{1\,.\,2}-\tfrac{1}{2}\beta(2n-9)+\tfrac{1}{2}\beta'(2n-9)$$

$$\gamma'' = \tfrac{1}{4}\frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9)}{1\,.\,2}-\tfrac{1}{4}\alpha\frac{(2n-7)(2n-9)}{1\,.\,2}+\tfrac{1}{2}\beta'(2n-9)$$

$$\begin{aligned}\delta = &-\tfrac{1}{8}\frac{(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2\,.\,3}+\tfrac{1}{8}\alpha\frac{(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2\,.\,3}\\ &-\tfrac{1}{4}\beta\frac{(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2}+\tfrac{1}{2}\gamma(2n-13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta' = &-\tfrac{3}{8}\frac{(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2\,.\,3}+\tfrac{3}{8}\alpha\frac{(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2\,.\,3}\\ &-\tfrac{2}{4}\beta\frac{(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2}-\tfrac{1}{4}\beta'\frac{(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2}+\tfrac{1}{2}\gamma(2n-13)+\tfrac{1}{2}\gamma'(2n-13)\end{aligned}$$

$$\delta' = -\tfrac{3}{8}\frac{(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2\,.\,3} + \tfrac{3}{8}\alpha\frac{(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$-\tfrac{1}{4}\beta\frac{(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2} - \tfrac{2}{4}\beta'\frac{(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2} + \tfrac{1}{2}\gamma'(2n-13) + \tfrac{1}{2}\gamma''(2n-13)$$

$$\delta'' = -\tfrac{1}{8}\frac{(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2\,.\,3} + \tfrac{1}{8}\alpha\frac{(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$-\tfrac{1}{4}\beta'\frac{(2n-11)(2n-13)}{1\,.\,2} + \tfrac{1}{2}\gamma''(2n-13)$$

wo zur Abkürzung $n = k + l$ gemacht worden ist. Durch successive Substitutionen ergeben sich hieraus die folgenden einfachen Ausdrücke der gesuchten Coefficienten

$$\begin{aligned}
&\alpha = 2(k+l)-1;\ \beta = 2(k+l)-5;\ \gamma = 2(k+l)-9;\ \delta = 2(k+l)-13;\ \text{etc.}\\
&\beta' = 2(k+l)-5;\ \gamma' = 2[2(k+l)-9];\ \delta' = 3[2(k+l)-13];\ \text{etc.}\\
&\gamma'' = 2(k+l)-9;\ \delta'' = 3[2(k+l)-13];\ \text{etc.}\\
&\delta''' = 2(k+l)-13;\ \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

wo das Gesetz des Fortganges klar ist. Da in diesen Ausdrücken k und l nicht abgesondert, sondern nur deren Summe vorkommt, so haben wir ohne Weiteres

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dD_{k,l}}{dB}\right) = \alpha D_{k,l-1} &+ \beta\, D_{k,l-3} + \gamma\, D_{k,l-5} + \delta\, D_{k,l-7} + \text{etc.}\\
&+ \beta' D_{k-2,l-1} + \gamma' D_{k-2,l-3} + \delta' D_{k-2,l-5} + \text{etc.}\\
&+ \gamma'' D_{k-4,l-1} + \delta'' D_{k-4,l-3} + \text{etc.}\\
&+ \delta''' D_{k-6,l-1} + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

wo die Coefficienten α, β, β', γ, etc. die nemlichen Werthe haben wie vorher. Hieraus folgt aber, daſs

$$\left(\frac{dD_{k,l}}{dB}\right) = \left(\frac{dD_{k+1,l-1}}{dA}\right)$$

weshalb die Differentialquotienten nach B nicht besonders berechnet zu werden brauchen. Dieselbe Gleichung läſst sich auch leicht aus den Relationen des vorhergehenden Artikels zwischen den Differentialquotienten der Gröſse X ableiten.

Durch die eben gefundenen Ausdrücke bekommen wir die bei der Berech-

nung der Saturnstörungen des Enckeschen Kometen anzuwendenden Differentialquotienten wie folgt:

$$\left(\frac{dD_{1,0}}{dA}\right) = D_{0,0} = 1\,;$$

$$\left(\frac{dD_{0,1}}{dA}\right) = 0\,;$$

$$\left(\frac{dD_{2,0}}{dA}\right) = 3D_{1,0} = 3A\,;$$

$$\left(\frac{dD_{1,1}}{dA}\right) = 3D_{0,1} = 3B\,;$$

$$\left(\frac{dD_{0,2}}{dA}\right) = 0\,;$$

$$\left(\frac{dD_{3,0}}{dA}\right) = 5D_{2,0} + 1\,;$$

$$\left(\frac{dD_{2,1}}{dA}\right) = 5D_{1,1}\,;$$

$$\left(\frac{dD_{1,2}}{dA}\right) = 5D_{0,2} + 1\,;$$

$$\left(\frac{dD_{0,3}}{dA}\right) = 0\,;$$

$$\left(\frac{dD_{4,0}}{dA}\right) = 7D_{3,0} + 3A\,;$$

$$\left(\frac{dD_{3,1}}{dA}\right) = 7D_{2,1} + 3B\,;$$

$$\left(\frac{dD_{2,2}}{dA}\right) = 7D_{1,2} + 3A\,;$$

$$\left(\frac{dD_{1,3}}{dA}\right) = 7D_{0,3} + 3B\,;$$

$$\left(\frac{dD_{0,4}}{dA}\right) = 0\,;$$

$$\left(\frac{dD_{5,0}}{dA}\right) = 9D_{4,0} + 5D_{2,0} + 1\,;$$

$$\left(\frac{dD_{4,1}}{dA}\right) = 9D_{3,1} + 5D_{1,1}\,;$$

$$\left(\frac{dD_{3,2}}{dA}\right) = 9D_{2,2} + 5D_{0,2} + 5D_{2,0} + 2\,;$$

$$\left(\frac{dD_{2,3}}{dA}\right) = 9D_{1,3} + 5D_{1,1}\,;$$

$$\left(\frac{dD_{1,4}}{dA}\right) = 9D_{0,4} + 5D_{0,2} + 1\,;$$

$$\left(\frac{dD_{0,5}}{dA}\right) = 0\,;$$

22.

Durch Hülfe der im vorigen Art. gefundenen Relation zwischen den Differentialquotienten nach A und B der Gröſsen $D_{k,l}$ geht der Ausdruck (A) des Art. 20. in den folgenden über

$$K_{k,l} = \left(\frac{dD_{k,l}}{dA}\right) \operatorname{tg} I \sin(N+K) + \left(\frac{dD_{k+1,l-1}}{dA}\right) \operatorname{tg} I \cos(N+K)$$

Nach der Anwendung dieses giebt der Ausdruck (B) des Art. 20. die Gröſsen $N_{k,l}$, und hierauf erhält man Z durch den folgenden Ausdruck

(Θ) .... $$Z = \Sigma (1-e^2)^{\frac{l}{2}} \, U_{k,l} \, N_{k,l}$$

worin die Entwickelung der im Art. 18. eingeführten Gröſsen $U_{k,l}$ substituirt werden muſs.

23.

Ehe ich weiter gehe, werde ich die vorhergehenden Entwickelungen auf die Berechnung der Saturnstörungen des Enckeschen Kometen anwenden. In den Astr. Nachr. N^{ro} 423 u. f. habe ich gezeigt, daſs man bei der Berechnung der Störungen eines Planeten osculirende Elemente desselben zu Grunde legen kann; da die dort gegebenen Sätze hier ebenfalls Anwendung finden, so habe ich die osculirenden Elemente des Kometen, welche für den Zeitpunkt

1829 Jan. 9,72 m. Par. Z.

gelten, und von Encke in dem Berl. astr. Jahrbuche für 1840 pag. 272 publicirt sind, angewandt. Am a. O. habe ich jedoch gezeigt, daſs es vortheilhafter ist, die anzuwendende mittlere Bewegung und die daraus folgende groſse Achse der Ellipse aus möglichst weit von einander liegenden, beobachteten Längen, oder osculirenden Werthen der Epoche der mittleren Länge abzuleiten. Dieses habe ich hier gethan, und somit die folgenden Elemente des Kometen erhalten, welchen ich die aus Bouvards Saturntafeln entnommenen gleichzeitigen Elemente der Saturnbahn nebenstelle.

Enckescher Komet.		Saturn.	
$\frac{m}{M}$	$= 0$	$\frac{m'}{M}$	$= \frac{1}{3512}$
n	$= 391809'',9$	n'	$= 43996'',1269$
$\log a$	$= 0,3463475$	$\log a'$	$= 0,9794960$
e	$= 0,8446760$	e'	$= 0,0560605$
ω	$= 182° \; 48' \; 55'',8$	ω'	$= 337° \; 30' \; 55'',4$
θ	$= 334 \; 29 \; 28,8$	θ'	$= 112 \; 10 \; 59,0$
i	$= 13 \; 20 \; 40,2$	i'	$= 2 \; 29 \; 31,4$

Diesen Werthen der mittleren Bewegungen, n und n', liegt das Julianische Jahr als Zeiteinheit zu Grunde. Das sechste Element, die Epoche der mittleren Anomalie, habe ich nicht angeführt, weil man dasselbe zur Berechnung der Störungen nicht braucht.

Die erste Arbeit besteht in der Berechnung der Gröſsen I, v und k durch die Gleichungen des Art. 7. Es ergab sich

$$I = 15°\,16'\,41'',4$$
$$\Psi = 216\;\;7\;\;40,2$$
$$\Phi = 353\;\;37\;\;22,6$$
$$v = 155\;\;17\;\;24,2;\quad 2v = 310°\,34'\,48'',4$$
$$k = 33\;\;54\;\;9,0;\quad 2k = 67\;\;48\;\;18,0$$
$$v + k = 189\;\;11\;\;33,2$$

Diese Werthe von v und k sind die Werthe von N und K, welche der angenommenen Zeitepoche zukommen, und müssen in den vorhergehenden Ausdrücken allenthalben für diese substituirt werden.

Hiemit bekam ich (Art. 8.)

$$\log l = 9,9996149$$
$$\log l' = 9,9847865$$
$$L = 67°\,29'\,7'',4$$
$$L' = 68\;\;8\;\;8,6$$

und sodann die folgenden 8 speciellen Werthe von A und B

f	$\log A$	$\log B$
0°	9,58272	9,95237n
22½	9,84921	9,83903n
45	9,96528	9,57907n
67½	9,99961	8,02943n
90	9,96518	9,55583
112½	9,84898	9,82941
135	9,58217	9,94838
157½	6,418..n	9,98476

Somit konnten durch Hülfe der Ausdrücke der Artt. 9. und 12. die folgenden Werthe der Gröſsen $D_{k,i}$ berechnet werden.

$D_{k,l}$							
k, l	$\cos 0f'$	$\cos f'$ $\sin f'$	$\cos 2f'$ $\sin 2f'$	$\cos 3f'$ $\sin 3f'$	$\cos 4f'$ $\sin 4f'$	$\cos 5f'$ $\sin 5f'$	$\cos 6f'$ $\sin 6f'$
2, 0	+0,2487		−0,5291 +0,5297				
1, 1	−0,0164		−1,0121 −1,0343				
0, 2	+0,1993		+0,5053 −0,4834				
3, 0		+0,1422 +0,3431		−0,5761 −0,2381			
2, 1		−0,3488 +0,0958		+0,7092 −1,6623			
1, 2		+0,1317 +0,2142		+1,5986 +0,7036			
0, 3		−0,2224 +0,0893		−0,2325 +0,5125			
4, 0	+0,1381		−0,2177 +0,2180		−0,0006 −0,5449		
3, 1	−0,0307		−0,3827 −0,4594		+2,1065 +0,0217		
2, 2	+0,1848		+0,1564 −0,0167		−0,0660 +3,0530		
1, 3	−0,0259		−0,2543 −0,1960		−1,9665 −0,0649		
0, 4	+0,0530		+0,1108 −0,1061		+0,0211 −0,4749		
5, 0		+0,0874 +0,2108		−0,2479 −0,1024		+0,4524 −0,1881	
4, 1		−0,2322 +0,0162		+0,3550 −0,6951		+0,8842 +2,1966	
3, 2		+0,1576 +0,1999		+0,5283 +0,4054		−4,2647 +1,6606	
2, 3		−0,2409 +0,0351		−0,1165 −0,1244		−1,5580 −4,1395	
1, 4		+0,0647 +0,0117		+0,2937 +0,0763		+2,0088 −0,7302	
0, 5		−0,0314 +0,0125		−0,0398 +0,0877		+0,1368 +0,3899	

$D_{k,l}$							
k, l	$\cos 0f'$	$\cos f'$ / $\sin f'$	$\cos 2f'$ / $\sin 2f'$	$\cos 3f'$ / $\sin 3f'$	$\cos 4f'$ / $\sin 4f'$	$\cos 5f'$ / $\sin 5f'$	$\cos 6f'$ / $\sin 6f'$
6, 0	+0,094		−0,140		0,000		+0,318
			+0,141		−0,240		+0,317
5, 1	−0,045		−0,211		+0,929		−1,859
			−0,331		+0,068		+1,823
4, 2	+0,151		+0,130		−0,257		−4,352
			+0,096		+1,282		−4,539
3, 3	−0,071		−0,225		−0,618		+5,912
			−0,210		−0,357		−5,540
2, 4	+0,044		+0,198		+0,215		+3,966
			−0,028		+0,149		+4,330
1, 5	−0,028		−0,023		−0,230		−1,692
			+0,057		+0,044		+1,516
0, 6	−0,015		−0,009		+0,003		−0,241
			+0,009		−0,055		−0,275

Diese tabellarische Aufstellung ist so zu verstehen, dafs z. B.

$$D_{3,1} = -0{,}0307 - 0{,}3827 \cos 2f' - 0{,}4594 \sin 2f'$$
$$+ 2{,}1065 \cos 4f' + 0{,}0217 \sin 4f'$$

u. s. f. Die vorhergehenden numerischen Werthe geben aufserdem noch

$$A = +0{,}38258 \cos f' + 0{,}92296 \sin f'$$
$$B = -0{,}89613 \cos f' + 0{,}35959 \sin f'$$

Hiemit ergeben sich durch die Ausdrücke der Artt. 21. und 22. für die Differentialquotienten von $D_{k,l}$ und die Gröfsen $K_{k,l}$ folgende Werthe

$$\left(\frac{dD_{k,l}}{dA}\right)$$

k, l	$\cos 0f'$	$\cos f'$ / $\sin f'$	$\cos 2f'$ / $\sin 2f'$	$\cos 3f'$ / $\sin 3f'$	$\cos 4f'$ / $\sin 4f'$
1, 0	1				
0, 1	0				
2, 0		+1,1477			
		+2,7689			
1, 1		−2,6884			
		+1,0788			
0, 2		0			
3, 0	+2,2435		−2,6455		
			+2,6485		
2, 1	−0,0820		−5,0605		
			−5,1715		
1, 2	+1,9965		+2,5265		
			−2,4170		
0, 3	0		0		
4, 0		+2,143		− 4,033	
		+5,171		− 1,667	
3, 1		−5,130		+ 4,964	
		+1,749		−11,636	
2, 2		+2,070		+11,190	
		+4,268		+ 4,925	
1, 3		−4,245		− 1,628	
		+1,704		+ 3,588	
0, 4		0		0	
5, 0	+3,487		−4,605		− 0,005
			+4,611		− 4,904
4, 1	−0,358		−8,505		+18,958
			−9,307		+ 0,195
3, 2	+5,904		+1,289		− 0,594
			+0,082		+27,477
2, 3	−0,315		−7,350		−17,698
			−6,936		− 0,584
1, 4	+2,474		+3,524		+ 0,190
			−3,372		− 4,274
0, 5	0		0		0

$K_{k,l}$					
k, l	cos $0f'$	cos f' / sin f'	cos $2f'$ / sin $2f'$	cos $3f'$ / sin $3f'$	cos $4f'$ / sin $4f'$
1, 0	−0,0436				
0, 1	−0,2696				
2, 0		−0,0501			
		−0,1208			
1, 1		−0,1922			
		−0,7938			
0, 2		+0,7252			
		−0,2909			
3, 0	−0,0979		+0,1154		
			−0,1156		
2, 1	−0,6013		+0,9342		
			−0,4885		
1, 2	−0,0650		+1,2542		
			+1,5002		
0, 3	−0,5384		−0,6814		
			+0,6508		
4, 0		−0,094		+0,176	
		−0,226		+0,073	
3, 1		−0,354		+0,870	
		−1,471		+0,958	
2, 2		+1,293		−1,827	
		−0,658		+2,922	
1, 3		−0,373		−2,946	
		−1,225		−1,484	
0, 4		+1,145		+0,439	
		−0,459		−0,968	
5, 0	−0,152		+0,201		0,000
			−0,201		+0,214
4, 1	−0,924		+1,613		−0,827
			−0,838		+1,314
3, 2	−0,161		+2,237		−5,087
			+2,505		−1,252
2, 3	−1,578		−0,027		+0,933
			+0,281		−7,385
1, 4	−0,023		+1,828		+4,765
			+2,017		+0,344
0, 5	−0,667		−0,950		−0,051
			+0,909		+1,152

24.

Wir erhalten ferner, wenn wir den Ausdruck (1) des Art. 12. mit der Anzahl von Secunden (206265") multipliciren, welche der Länge des Kreisradius gleichkommt, in Secunden ausgedrückt

$$\log \mu_3 = 0{,}14085$$
$$- \ \mu_4 = 9{,}50771 - 10$$
$$- \ \mu_5 = 8{,}87456 - 10$$
$$- \ \mu_6 = 8{,}24141 - 10$$
$$- \ \mu_7 = 7{,}60826 - 10$$

Die Substitution des oben angeführten numerischen Werthes der Excentricität der Saturnbahn in die Ausdrücke des Art. 15. gab folgende numerischen Werthe der dort entwickelten Größen

$(0)_{3,0} = +0{,}004733$
$(2)_{3,0} = +0{,}0031552$
$(4)_{3,0} = +0{,}00000245$

$(0)_{3,1} = +0{,}084388$
$(2)_{3,1} = +0{,}0002422$
$(1)_{3,1} = +0{,}0560715$
$(3)_{3,1} = +0{,}0000881$

$(0)_{3,2} = +0{,}007088$
$(2)_{3,2} = -0{,}0015500$
$(4)_{3,2} = -0{,}00000165$
$(1)_{3,2} = +0{,}0066753$
$(3)_{3,2} = +0{,}0000111$

$(0)_{3,3} = +0{,}000584$
$(2)_{3,3} = -0{,}0002422$
$(1)_{3,3} = +0{,}0006571$
$(3)_{3,3} = -0{,}0000294$

$(0)_{3,4} = +0{,}000048$
$(2)_{3,4} = -0{,}0000277$
$(4)_{3,4} = +0{,}00000042$
$(1)_{3,4} = +0{,}0000600$
$(3)_{3,4} = -0{,}0000056$

$(0)_{4,0} = +0{,}009484$
$(2)_{4,0} = +0{,}0031639$
$(4)_{4,0} = +0{,}00000245$

$(0)_{4,1} = +0{,}112870$
$(2)_{4,1} = +0{,}0002863$
$(1)_{4,1} = +0{,}0561706$
$(3)_{4,1} = +0{,}00008809$

$(0)_{4,2} = +0{,}011055$
$(2)_{4,2} = -0{,}0015450$
$(4)_{4,2} = -0{,}00000165$
$(1)_{4,2} = +0{,}0082592$
$(3)_{4,2} = +0{,}0000131$

$(0)_{4,3} = +0{,}001013$
$(2)_{4,3} = -0{,}0002863$
$(1)_{4,3} = +0{,}0009324$
$(3)_{4,3} = -0{,}00002936$

$(0)_{4,4} = +0{,}000090$
$(2)_{4,4} = -0{,}0000369$
$(4)_{4,4} = +0{,}00000042$
$(1)_{4,4} = +0{,}0000944$
$(3)_{4,4} = -0{,}0000064$

$(0)_{5,0} = +0{,}01584$
$(2)_{5,0} = +0{,}003175$
$(4)_{5,0} = +0{,}0000025$

$(0)_{5,1} = +0{,}14164$
$(2)_{5,1} = +0{,}000330$
$(1)_{5,1} = +0{,}056314$
$(3)_{5,1} = +0{,}0000881$

$(0)_{5,2} = +0{,}01584$
$(2)_{5,2} = -0{,}001540$
$(4)_{5,2} = -0{,}0000016$
$(1)_{5,2} = +0{,}009853$
$(3)_{5,2} = +0{,}0000144$

$(0)_{5,3} = +0{,}00160$
$(2)_{5,3} = -0{,}000330$
$(1)_{5,3} = +0{,}001252$
$(3)_{5,3} = -0{,}0000294$

$(0)_{5,4} = +0{,}00015$
$(2)_{5,4} = -0{,}000047$
$(4)_{5,4} = +0{,}0000004$
$(1)_{5,4} = +0{,}000140$
$(3)_{5,4} = -0{,}000007$

$(0)_{6,0} = +0{,}02383$
$(2)_{6,0} = +0{,}003189$
$(4)_{6,0} = +0{,}0000025$

$(0)_{6,1} = +0{,}17076$
$(2)_{6,1} = +0{,}000374$
$(1)_{6,1} = +0{,}056500$
$(3)_{6,1} = +0{,}0000881$

$(0)_{6,2} = +0{,}02146$
$(2)_{6,2} = -0{,}001535$
$(4)_{6,2} = -0{,}0000016$
$(1)_{6,2} = +0{,}011445$
$(3)_{6,2} = +0{,}0000161$

$(0)_{6,3} = +0{,}00235$
$(2)_{6,3} = -0{,}000374$
$(1)_{6,3} = +0{,}001615$
$(3)_{6,3} = -0{,}0000294$

$(0)_{6,4} = +0{,}00024$
$(2)_{6,4} = -0{,}000059$
$(4)_{6,4} = +0{,}0000004$
$(1)_{6,4} = +0{,}000195$
$(3)_{6,4} = -0{,}0000080$

$(0)_{7,0} = +0{,}03347$
$(2)_{7,0} = +0{,}003205$
$(4)_{7,0} = +0{,}0000025$

$(0)_{7,1} = +0{,}20029$
$(2)_{7,1} = +0{,}000419$
$(1)_{7,1} = +0{,}056731$
$(3)_{7,1} = +0{,}0000881$

$(0)_{7,2} = +0{,}02794$
$(2)_{7,2} = -0{,}001530$
$(4)_{7,2} = -0{,}0000016$
$(1)_{7,2} = +0{,}013085$
$(3)_{7,2} = +0{,}0000174$

$(0)_{7,3} = +0{,}00331$
$(2)_{7,3} = -0{,}000419$
$(1)_{7,3} = +0{,}002023$
$(3)_{7,3} = -0{,}0000294$

$(0)_{7,4} = +0{,}00037$
$(2)_{7,4} = -0{,}000072$
$(4)_{7,4} = +0{,}0000004$
$(1)_{7,4} = +0{,}000264$
$(3)_{7,4} = -0{,}0000087$

und durch die Substitution dieser Werthe in den im Art. 13. für $\frac{a^n}{r^n}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} mf$ gefundenen allgemeinen Ausdruck erhielt ich

$$\mu_3 \frac{a'^3}{r'^3} \cos 2f' = -(8{,}5883) \cos g' + (0{,}13743) \cos 2g' + (9{,}4306) \cos 3g' + (8{,}5645) \cos 4g' + (7{,}6325) \cos 5g' + (6{,}659) \cos 6g'$$

$\mu_3 \frac{a'^3}{r'^3} \sin 2f' =$ denselben Coefficienten, aber mit dem Sinus von g', $2g'$, etc. multiplicirt.

$$\mu_3 \frac{a'^3}{r'^3} = (0{,}14290) + (9{,}3682) \cos g' + (8{,}2924) \cos 2g' + (7{,}208) \cos 3g' + (6{,}123) \cos 4g'$$

$$\mu_4 \frac{a'^4}{r'^4} \cos 3f' = (6{,}131) \cos g' - (8{,}2546) \cos 2g' + (9{,}4995) \cos 3g' + (8{,}9492) \cos 4g' + (8{,}200) \cos 5g' + (7{,}364) \cos 6g' + (6{,}462) \cos 7g'$$

$\mu_4 \frac{a'^4}{r'^4} \sin 3f' =$ denselben Coefficienten, aber Sinus statt Cosinus.

$$\mu_4 \frac{a'^4}{r'^4} \cos f' = (8{,}2597) + (9{,}5123) \cos g' + (8{,}7356) \cos 2g' + (7{,}827) \cos 3g' + (6{,}862) \cos 4g' + (5{,}870) \cos 5g'$$

$$\mu_4 \frac{a'^4}{r'^4} \sin f' \qquad (9{,}5058) \sin g' + (8{,}7337) \sin 2g' + (7{,}827) \sin 3g' + (6{,}862) \sin 4g' + (5{,}870) \sin 5g'$$

$$\mu_5 \frac{a'^5}{r'^5} \cos 4f' = (6{,}197) \cos 2g' - (7{,}796) \cos 3g' + (8{,}8593) \cos 4g' + (8{,}426) \cos 5g' + (7{,}773) \cos 6g' + (7{,}015) \cos 7g' + (6{,}176) \cos 8g'$$

$\mu_5 \frac{a'^5}{r'^5} \sin 4f' =$ denselben Coefficienten, aber Sinus statt Cosinus.

$$\mu_5 \frac{a'^5}{r'^5} \cos 2f' = (6{,}255) \cos 0g' + (7{,}328) \cos g' + (8{,}8758) \cos 2g' + (8{,}276) \cos 3g' + (7{,}494) \cos 4g' + (6{,}623) \cos 5g' + (5{,}708) \cos 6g'$$

$\mu_5 \frac{a'^5}{r'^5} \sin 2f' =$ denselben Coefficienten, aber Sinus statt Cosinus.

$$\mu_5 \frac{a'^5}{r'^5} = (8{,}8815) + (8{,}327) \cos g' + (7{,}375) \cos 2g' + (6{,}380) \cos 3g'$$

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \cos 5f' = (5{,}801) \cos 3g' - (7{,}283) \cos 4g' + (8{,}217) \cos 5g' + (7{,}878) \cos 6g'$
$+ (7{,}299) \cos 7g' + (6{,}611) \cos 8g'$

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \sin 5f' =$ denselben Coefficienten, aber Sinus statt Cosinus.

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \cos 3f' = (5{,}334) \cos g' + (4{,}672) \cos 2g' + (8{,}2393) \cos 3g' + (7{,}766) \cos 4g'$
$+ (7{,}081) \cos 5g' + (6{,}297) \cos 6g'$

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \sin 3f' =$ denselben Coefficienten, aber Sinus statt Cosinus.

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \cos f' = (7{,}298) + (8{,}255) \cos g' + (7{,}599) \cos 2g' + (6{,}779) \cos 3g' + (5{,}882) \cos 4g'$

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \sin f' = (8{,}245) \sin g' + (7{,}595) \sin 2g' + (6{,}779) \sin 3g' + (5{,}882) \sin 4g'$

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \cos 6f' = (5{,}397) \cos 4g' - (6{,}742) \cos 5g' + (7{,}573) \cos 6g' + (7{,}313) \cos 7g'$
$+ (6{,}801) \cos 8g' + (6{,}174) \cos 9g'$

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \sin 6f' =$ denselben Coefficienten, aber Sinus statt Cosinus.

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \cos 4f' = -(6{,}049) \cos 3g' + (7{,}601) \cos 4g' + (7{,}226) \cos 5g' + (6{,}622) \cos 6g'$
$+ (5{,}909) \cos 7g'$

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \sin 4f' =$ denselben Coefficienten, aber Sinus statt Cosinus.

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \cos 2f' = (5{,}511) \cos 0g' + (6{,}542) \cos g' + (7{,}617) \cos 2g' + (7{,}102) \cos 3g'$
$+ (6{,}386) \cos 4g' + (5{,}577) \cos 5g'$

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \sin 2f' =$ denselben Coefficienten, aber Sinus statt Cosinus.

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} = (7{,}623) + (7{,}211) \cos g' + (6{,}355) \cos 2g' + (5{,}428) \cos 3g'$

In diesen Werthen sind die Coefficienten schon in Secunden ausgedrückt, aber statt der Coefficienten selbst ihre Logarithmen angesetzt, weil man diese in den folgenden Rechnungen braucht. Ich füge noch hinzu, daſs man zu allen in den vorstehenden Ausdrücken vorkommenden Logarithmen, deren Characteristik eine andere Zahl wie die 0 ist, sich -10 ganze Einheiten hinzudenken muſs, oder mit andern Worten, daſs sie Logarithmen von Zahlen kleiner wie Eins sind.

25.

Multiplicirt man nun die Coefficienten der im vorhergehenden Artikel entwickelten Ausdrücke mit den resp. Coefficienten der Gröſsen $D_{k,l}$ und $K_{k,l}$, die im vorvorhergehenden Artikel entwickelt wurden, so ergeben sich zufolge Art. 12. die Gröſsen $C_{k,l}$ und $N_{k,l}$ wie folgt:

$C_{k,l}$								
k, l	cos $0g'$	cos g' / sin g'	cos $2g'$ / sin $2g'$	cos $3g'$ / sin $3g'$	cos $4g'$ / sin $4g'$	cos $5g'$ / sin $5g'$	cos $6g'$ / sin $6g'$	cos $7g'$ / sin $7g'$
2,0	9,5386	8.893	9.8580*n*	9,1538*n*	8,292 *n*	7,326*n*		
		8,304 *n*	9.8614	9,1555	8,292	7,326		
1,1	8,3577*n*	8,540	0,1425*n*	9,4365*n*	8,573 *n*	7,607*n*		
		8.595	0,1518*n*	9,4459*n*	8,583 *n*	7,617 *n*		
0,2	9,4424	8.437	9.8433	9,1360	8,272	7,306		
		8,264	9,8216*n*	9,1157*n*	8,252 *n*	7,286*n*		
3,0	7,415	8.665	8,259	9,2575*n*	8,711 *n*	7,961*n*	7,123*n*	
		9,0440	8.359	8,863 *n*	8,323 *n*	7,578*n*	6.739*n*	
2,1	7,805 *n*	9,0548*n*	8,502 *n*	9,3545	8,799	8,052	7,212	
		8,490	8.546	9,7194*n*	9,1704*n*	8,422*n*	7,583*n*	
1,2	7,382	8,632	8,335 *n*	9,7039	9,1538	8,405	7,566	
		8,8394	7,015 *n*	9,3495	8,7983	8,048	7.209	
0,3	7,610 *n*	8,8595*n*	7,899 *n*	8,8746*n*	8,319 *n*	7,568*n*	6.728*n*	
		8,460	7,642 *n*	9,2106	8,660	7,911	7,072	
4,0	8,0200	7,394	8,205 *n*	7,615 *n*	6,843 *n*	—	—	—
		6,660	8,215	7,998	8,587 *n*	8,164*n*	7,507*n*	6.690*n*
3,1	7,381 *n*	7,163 *n*	8,459 *n*	8,473 *n*	9,1787	8,751	8,095	7,278
		6,984 *n*	8,538 *n*	7,951 *n*	6,007	6,648	6,108	—
2,2	8,1490	7,628	8,086	7,564	7,631 *n*	7,248*n*	6,591*n*	—
		—	7,099 *n*	8,518 *n*	9,3432	8,913	8,256	7,439
1,3	7,304 *n*	7,035 *n*	8,281 *n*	8,211	9,1548*n*	8,722*n*	8,065*n*	7,248*n*
		6,614 *n*	8,168 *n*	7,479 *n*	7,725 *n*	7,240*n*	6,583*n*	—
0,4	7,607	7,132	7,927	7,273	7,274	6,752	6,095	—
		6,348 *n*	7,902 *n*	7,488	8,539 *n*	8,105*n*	7,448*n*	6,631*n*
5,0	6,243	7,200	6,544	7,634 *n*	7,369 *n*	7,856	7,536	6.935
		7,569	6,926	7,218 *n*	6,336 *n*	7,508*n*	7,155*n*	6,553*n*
4,1	6,667 *n*	7,624 *n*	6,968 *n*	7,780	6,458	8,177	7,828	7,226
		6,455	—	8,082 *n*	7,926 *n*	8,549	8,220	7,621
3,2	6,499	7,456	6,799	7,963	8,063	8,843*n*	8,507*n*	7,909*n*
		7,546	6,903	7,855	6,986 *n*	8,445	8,104	7,499
2,3	6,683 *n*	7,640 *n*	6,984 *n*	7,336 *n*	7,388	8,413*n*	8,074*n*	7,472*n*
		6,790	6,147	7,335 *n*	7,878	8,835*n*	8,498*n*	7,896*n*
1,4	6,112	7,069	6,413	7,708	7,366 *n*	8,524	8,184	7,582
		6,313	—	7,123	7,279	8,077*n*	7,744*n*	7,142*n*
0,5	5,798 *n*	6,755 *n*	6,099 *n*	6,840 *n*	6,702 *n*	7,353	7,017	6.415
		6,342	—	7,183	6,444 *n*	7,815	7,472	6,870
6,0	6,596	6,184	6,763 *n*	6,250 *n*	—	6,242*n*	7,072	6,811
		—	6,766	6,253	6,981 *n*	6,762*n*	7,031	6,810
5,1	6,276 *n*	—	6,941 *n*	6,600 *n*	7,569	7,413	7,815*n*	7.578*n*
		6,025 *n*	7,137 *n*	6,624 *n*	6,284	6,948*n*	7,831	7,570
4,2	6,802	6,390	6,731	6,218	7,011 *n*	7,292	8,211*n*	7,947*n*
		—	6,599	—	7,708	7,668	8,213*n*	7,962*n*
3,3	6,474 *n*	6,062 *n*	6,969 *n*	6,301 *n*	7,392 *n*	7,631*n*	8,337	8,081
		—	6,949 *n*	6,436 *n*	7,153 *n*	7,388	8,316*n*	8,052*n*
2,4	6,266	—	6,914	6,401	6,933	7,259*n*	8,171	7,907
		—	6,064 *n*	—	6,774	7,328*n*	8,208	7,945
1,5	6,070 *n*	—	5,979 *n*	—	6,963 *n*	6,730	7,804*n*	7,536*n*
		—	6,373	—	6,244	6,879*n*	7,750	7,489
0,6	5,799 *n*	—	—	—	—	6,122	6,952*n*	6,691*n*
		—	—	—	6,341 *n*	—	7,009*n*	6,748*n*

$N_{k,l}$

k, l	cos 0g′	cos g′ sin g′	cos 2g′ sin 2g′	cos 3g′ sin 3g′	cos 4g′ sin 4g′	cos g′ sin 5g′	cos 6g′ sin 6g′
1, 0	8,782 n	8,007 n	6,931 n				
		—	—				
0, 1	9,5737n	8,799 n	7,723 n				
		—	—				
2, 0	6,962 n	8,212 n	7,436 n	—			
		8,591 n	7,816 n	6,908 n			
1, 1	7,546 n	8,796 n	8,020 n	7,110 n	—		
		9,408 n	8,634 n	7,726 n	6,678 n		
0, 2	8,1230	9,373	8,596	7,686			
		8,972 n	8,198 n	7,290 n			
3, 0	7,871 n	7,265 n	7,924	7,337	6,565		
		6.386 n	7,940 n	7,341 n	6.569 n		
2, 1	8,6589n	8,034 n	8,837	8,244	7,475	6,447	
		7,010 n	8.564 n	7,965 n	7,193 n	6.165 n	
1, 2	7,674 n	7,097	8,973	8,375	7.603	6.575	
		7,498	9,052	8,453	7,681	6,653	
0, 3	8,6138n	8,110 n	8,720 n	8,115 n	7,339 n	6,311 n	
		7,136	8,690	8,091	7,219	6,291	
4, 0	6,274 n	7,231 n	6.575 n	7,485	7,008	6,328	
		7,599 n	6.956 n	7,054	6,626	—	
3, 1	6,850 n	7,807 n	7,151 n	8,174	7.703	7,023	6,241
		8,412 n	7,769 n	8,198	7,744	7,064	6,282
2, 2	7,412	8,369	7,713	8,492 n	8,025 n	7.345 n	6.563 n
		8,064 n	7,421 n	8,702	8.228	7,548	6,766
1, 3	6,873 n	7,830 n	7,174 n	8,712 n	8.233 n	7,553 n	5,771 n
		8,333 n	7.690 n	8,424 n	7,935 n	7,255 n	6,473 n
0, 4	7,359	8,316	7,660	7,919	7,405	6,725	5.943
		7,907 n	7,264 n	8,233 n	7,749 n	7,069 n	6,287 n
5, 0	6,801 n	6,263 n	6.920	6,407	—	—	—
		5,808 n	6.920 n	6,455 n	6,931	6.557	5,963
4, 1	7,584 n	6,994 n	7,811	7,336	7,464 n	7,144 n	6,550 n
		6,428 n	7,540 n	7,096 n	7,702	7,345	6,751
3, 2	6,785 n	6.658	7,967	7,549	8.296 n	7,934 n	7,340 n
		6,904	8,016	7,526	7,642 n	7,309 n	6,730 n
2, 3	7,821 n	7,409 n	6,671 n	6,116 n	7,571	7,197	6,603
		5,954	7,066	7,143	8.468 n	8,095 n	7,501 n
1, 4	5,439 n	6,767	7,879	7,220	8,289	7,905	7,311
		6.810	7,922	7,401	7,269	6,763	6,169
0, 5	7,451 n	7,142 n	7,611 n	7,079 n	6,635 n	5,935 n	—
		6,464	7,576	6,998	7,682	7,288	6,694

wo so wie im vorhergehenden Artikel die Logarithmen der Coefficienten statt dieser selbst angeführt worden sind.

26.

Um weiter gehen zu können, bedürfen wir der numerischen Werthe der im Art. 18. eingeführten, und $U_{k,l}$ genannten Functionen von u, welche die Factoren von $C_{k,l}$ und beziehungsweise $N_{k,l}$ in den Ausdrücken für die Differentialquotienten der Störungsfunction sind. Substituirt man den im Art. 23. angeführten numerischen Werth der Excentricität der Kometenbahn in die im Art. 19. entwickelten Ausdrücke dieser Functionen, und multiplicirt sie mit den betreffenden Potenzen von $1-e^2$, so bekommt man

$$U_{1,0} = -(9{,}92669) + (0{,}00000)\cos u$$

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\, U_{0,1} = (9{,}72858)\sin u$$

$$U_{2,0} = (0{,}08404) - (0{,}22772)\cos u + (9{,}69897)\cos 2u$$

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\, U_{1,1} = -(9{,}65527)\sin u + (9{,}42755)\sin 2u$$

$$(1-e^2)\, U_{0,2} = (9{,}15613) - (9{,}15613)\cos 2u$$

$$U_{3,0} = -(0{,}27182) + (0{,}46102)\cos u - (0{,}10278)\cos 2u + (9{,}39794)\cos 3u$$

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\, U_{2,1} = (9{,}71241)\sin u - (9{,}65527)\sin 2u + (9{,}12652)\sin 3u$$

$$(1-e^2)\, U_{1,2} = -(9{,}08282) + (8{,}85510)\cos u + (9{,}08282)\cos 2u - (8{,}85510)\cos 3u$$

$$(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\, U_{0,3} = (9{,}06080)\sin u - (8{,}58368)\sin 3u$$

$$U_{4,0} = (0{,}4807) - (0{,}6941)\cos u + (0{,}4217)\cos 2u - (9{,}9267)\cos 3u + (9{,}0969)\cos 4u$$

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\, U_{3,1} = -(9{,}8207)\sin u + (9{,}8492)\sin 2u - (9{,}5303)\sin 3u + (8{,}8255)\sin 4u$$

$$(1-e^2)\, U_{2,2} = (9{,}1400) - (9{,}0838)\cos u - (9{,}0095)\cos 2u + (9{,}0838)\cos 3u - (8{,}5541)\cos 4u$$

$$(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\, U_{1,3} = -(8{,}9875)\sin u + (8{,}5837)\sin 2u + (8{,}5104)\sin 3u - (8{,}2827)\sin 4u$$

$$(1-e^2)^2\, U_{0,4} = (8{,}4884) - (8{,}6133)\cos 2u + (8{,}0112)\cos 4u$$

$$U_{5,0} = -(0{,}7013) + (0{,}9305)\cos u - (0{,}7097)\cos 2u + (0{,}3214)\cos 3u - (9{,}7226)\cos 4u + (8{,}7959)\cos 5u$$

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\, U_{4,1} = (9{,}9601)\sin u - (0{,}0403)\sin 2u + (9{,}8282)\sin 3u - (9{,}3542)\sin 4u + (8{,}5245)\sin 5u$$

$$(1-e^2)\, U_{3,2} = -(9{,}2482) + (9{,}2768)\cos u + (8{,}9362)\cos 2u - (9{,}2336)\cos 3u + (8{,}9579)\cos 4u - (8{,}2530)\cos 5u$$

$$(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\, U_{2,3} = (9{,}0054)\sin u - (8{,}8114)\sin 2u - (8{,}2497)\sin 3u + (8{,}5104)\sin 4u - (7{,}9816)\sin 5u$$

$$(1-e^2)^2\, U_{1,4} = -(8{,}4150) + (8{,}0112)\cos u + (8{,}5400)\cos 2u - (8{,}1873)\cos 3u - (7{,}9379)\cos 4u + (7{,}7102)\cos 5u$$

$$(1-e^2)^{\frac{5}{2}}\, U_{0,5} = (8{,}439)\sin u - (8{,}138)\sin 3u + (7{,}439)\sin 5u$$

wo gleichfalls die Logarithmen der Coefficienten angesetzt worden sind, weil diese in der folgenden Rechnung gebraucht werden müssen. Multiplicirt man nun die Coefficienten dieser Ausdrücke mit den im vorhergehenden Artikel gegebenen Coefficienten von $C_{k,l}$ und $N_{k,l}$, so ergeben sich nach Anleitung der in den Artt. 18., 20. u. 22. entwickelten Formeln die numerischen Werthe der Differentialquotienten der Störungsfunction. Nemlich durch die Ausdrücke (A) des Art. 18. bekommt man $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$ und $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$; durch den Ausdruck (Θ) des Art. 22. erhält man Z. Diese Ausdrücke haben zuerst die im Art. 18. unter (B) angeführte Form, die, wie dort unter (C) gezeigt worden ist, auf die im Art. 11. verlangte Form hingeführt wird. Ist dieses geschehen, so ergiebt sich $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$ durch den Ausdruck (Z) des Art. 20.

	$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$		$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$	
i, i'	$(iu+i'g')$ cos	$(iu+i'g')$ sin	$(iu+i'g')$ sin	$(iu+i'g')$ cos
	"			"
0, 0	−0,6657	"	"	+0,0143
1, 0	+0,8173	−0,0100	+0,3115	−0,0187
2, 0	−0,0558	−0,0004	−0,0124	+0,0008
3, 0	+0,0124	−0,0008	+0,0038	−0,0002
4, 0	−0,0010	+0,0001	−0,0003	0,0000
−3, 1	−0,002	−0,010	+0,001	0,000
−2, 1	+0,043	+0,137	−0,009	+0,004
−1, 1	−0,045	−0,410	−0,004	+0,099
0, 1	+0,038	+0,501	+0,019	−0,210
1, 1	−0,037	−0,280	−0,014	+0,147
2, 1	+0,025	+0,066	+0,014	−0,038
3, 1	−0,002	−0,005	−0,001	+0,002
−3, 2	−0,022	+0,017	−0,006	−0,002
−2, 2	+0,106	−0,040	+0,045	+0,010
−1, 2	−1,280	+1,150	−1,189	−1,070
0, 2	+1,421	−1,273	+1,316	+1,194
1, 2	−0,478	+0,387	−0,404	−0,354
2, 2	+0,032	−0,016	+0,021	+0,008
3, 2	−0,004	+0,003	−0,003	−0,002
−4, 3	−0,004	−0,002	−0,002	+0,001
−3, 3	+0,013	+0,025	+0,006	−0,015
−2, 3	−0,340	−0,205	−0,317	+0,183
−1, 3	+0,510	+0,614	+0,478	−0,579
0, 3	−0,370	−0,570	−0,347	+0,543
1, 3	+0,169	+0,201	+0,158	−0,193
2, 3	−0,039	−0,025	−0,035	+0,023

	$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$		$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$	
i, i'	$(iu+i'g')$ cos	$(iu+i'g')$ sin	$(iu+i'g')$ sin	$(iu+i'g')$ cos
	"	"	"	"
3, 3	+0,002	+0,003	+0,002	−0,001
−4, 4	−0,002	+0,005	−0,002	−0,003
−3, 4	+0,013	−0,082	+0,011	+0,075
−2, 4	−0,117	+0,214	−0,110	−0,202
−1, 4	+0,202	−0,233	+0,191	+0,219
0, 4	−0,157	+0,156	−0,149	−0,148
1, 4	+0,066	−0,076	+0,061	+0,074
2, 4	−0,013	+0,023	−0,012	−0,023
3, 4	+0,001	−0,004	+0,001	+0,003
−4, 5	+0,013	−0,002	+0,012	+0,003
−3, 5	−0,057	−0,013	−0,056	+0,010
−2, 5	+0,095	+0,049	+0,092	−0,045
−1, 5	−0,091	−0,069	−0,093	+0,064
0, 5	+0,060	+0,050	+0,059	−0,048
1, 5	−0,028	−0,023	−0,033	+0,021
2, 5	+0,009	+0,006	+0,011	−0,004
3, 5	−0,002	−0,001	−0,002	+0,001
−4, 6	−0,005	−0,011	−0,005	+0,011
−3, 6	0,000	+0,029	−0,001	−0,029
−2, 6	+0,011	−0,039	+0,011	+0,038
−1, 6	−0,013	+0,032	−0,015	−0,032
0, 6	+0,007	−0,021	+0,009	+0,019
1, 6	−0,003	+0,011	−0,005	−0,011
2, 6	+0,001	−0,005	+0,002	+0,004

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}Z$$

i, i′	(iu + i′g′) sin	(iu + i′g′) cos	i, i′	(iu + i′g′) sin	(iu + i′g′) cos
		″		″	″
0, 0	″	+0,0695	1, 2	+0,015	+0,020
1, 0	−0,2309	−0,0856	2, 2	−0,007	−0,008
2, 0	+0,0238	+0,0087	3, 2	+0,001	+0,001
3, 0	−0,0068	−0,0023	−3, 3	+0,004	−0,008
−3, 1	+0,001	+0,006	−2, 3	+0,003	+0,012
−2, 1	−0,001	−0,067	−1, 3	−0,012	−0,006
−1, 1	+0,048	+0,076	0, 3	+0,011	−0,003
0, 1	−0,074	+0,028	1, 3	−0,006	+0,005
1, 1	+0,039	−0,060	2, 3	+0,002	−0,002
2, 1	−0,017	+0,021	−3, 4	+0,005	+0,002
3, 1	+0,001	−0,002	−2, 4	−0,005	+0,001
−3, 2	−0,014	−0,006	−1, 4	+0,003	−0,005
−2, 2	+0,034	−0,003	0, 4	−0,001	+0,006
−1, 2	−0,022	+0,027	1, 4	+0,001	−0,003
0, 2	−0,009	−0,031			

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$$

i, i′	(iu + i′g′) sin	(iu + i′g′) cos	i, i′	(iu + i′g′) sin	(iu + i′g′) cos	i, i′	(iu + i′g′) sin	(iu + i′g′) cos
		″		″	″		″	″
0,0	″	+0,0948	0,2	−0,308	−0,414	1,4	−0,012	−0,025
1,0	−0,3145	−0,1163	1,2	+0,107	+0,137	2,4	+0,002	+0,006
2,0	+0,0271	+0,0109	2,2	−0,013	−0,011	−4,5	−0,003	−0,001
3,0	−0,0078	−0,0023	3,2	+0,002	+0,002	−3,5	+0,015	−0,001
−3,1	+0,001	+0,006	−3,3	+0,001	−0,004	−2,5	−0,027	+0,008
−2,1	−0,004	−0,070	−2,3	+0,098	−0,023	−1,5	+0,028	−0,013
−1,1	+0,067	+0,051	−1,3	−0,168	+0,129	0,5	−0,018	+0,011
0,1	−0,102	+0,083	0,3	+0,130	−0,134	1,5	+0,010	−0,005
1,1	+0,055	−0,098	1,3	−0,058	+0,052	2,5	−0,003	+0,001
2,1	−0,024	+0,031	2,3	+0,013	−0,007	−3,6	−0,001	+0,008
3,1	+0,001	−0,002	−3,4	+0,005	−0,018	−2,6	−0,002	−0,010
−3,2	−0,012	−0,004	−2,4	+0,016	+0,061	−1,6	+0,003	+0,010
−2,2	+0,024	−0,010	−1,4	−0,039	−0,074	0,6	−0,002	−0,005
−1,2	+0,249	+0,372	−0,4	+0,032	+0,053	1,6	+0,001	+0,003

Die tabellarische Aufstellung dieser Gröſsen ist so zu verstehen, daſs z. B.

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{ds}\right) = +0'',0948 - 0'',3145 \sin u - 0'',1163 \cos u$$
$$+0,0271 \sin 2u + 0,0109 \cos 2u$$
$$+ \text{ etc.} \qquad + \text{ etc.}$$
$$+0,001 \sin(-3u+g') + 0,006 \cos(-3u+g')$$
$$+ \text{ etc.} \qquad + \text{ etc.}$$

Dieses wird hier ein für alle Mal angemerkt, indem es sonst weiter unten sich mehrmals wiederholen würde. Ich mache auf die Convergenz, die sich in den vorstehenden numerischen Werthen der Differentialquotienten von Ω zeigt, aufmerksam. Zuerst zeigt sich eine grofse Convergenz in jeder der Abtheilungen, die nach den Vielfachen der Sinusse und Cosinusse von g' gemacht worden sind. In jeder derselben convergiren die Werthe der Coefficienten, von dem gröfsten derselben an gerechnet, vorwärts und rückwärts so stark, dafs nicht alle in den Functionen $U_{k,l}$ befindlichen Glieder berücksichtigt zu werden brauchten. Alsdann ist die Convergenz zu betrachten, die sich in den gröfsten Gliedern der auf einander folgenden Abtheilungen zeigt. Sie kommt derjenigen Convergenz sehr nahe, die ich oben die natürliche Convergenz der Störungsfunction (oder hier vielmehr der Differentialquotienten derselben) genannt habe. Sie wäre die natürliche Convergenz selbst, wenn ich statt nach $i'g'$ die Differentialquotienten nach $i'f'$ entwickelt hätte. (S. Art. 11.).

27.

Aufser den im Art. 12. erwähnten Bedingungsgleichungen für die Controlirung der Entwickelung der Gröfsen $D_{k,l}$ kann man im Laufe der Rechnung noch manche andere anwenden, die so nahe liegen, dafs eine kurze Andeutung derselben genügen wird. Da ein grofser Theil der vorhergehenden Rechnungen darin besteht, dafs ein und derselbe Coefficient mit einer Anzahl anderer Coefficienten multiplicirt werden mufs, so kann man zur Controlirung der Rechnung aufser diesen Coefficienten ihre Summe einführen, wo alsdann die Summe jener Producte dem Producte jenes Coefficienten in die genannte Summe gleich werden mufs.

§. III.

Die Auswahl zweckmäſsiger Coordinaten.

28.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daſs die Differentialquotienten der Störungsfunction nach den Coordinaten x, y, z genommen, oder mit andern Worten, die nach den Richtungen dieser Coordinaten zerlegten störenden Kräfte die Eigenschaft besitzen, daſs man sie ohne Hülfe unendlicher, nach den Potenzen der Excentricität und Neigung der Kometenbahn fortschreitenden Reihen entwickeln kann, und somit auf stark convergirende Reihen geführt wird. Es zeigte sich, daſs in dem Falle, welcher hier abgehandelt wird, diese Eigenschaft durch die Einführung der excentrischen Anomalie des Kometen erzeugt wird. Bei der ferneren Anwendung dieser störenden Kräfte zur Berechnung der gestörten, oder wahren Werthe der Coordinaten des Kometen, ist die Wahl dieser nicht gleichgültig, sie muſs vielmehr durch die Bedingung geleitet werden, daſs zu deren Berechnung aus den genannten Differentialquotienten der Störungsfunction keine unendlichen, nach den Potenzen der Excentricität und Neigung der Kometenbahn fortschreitenden Reihen erforderlich seyen.

Die Differentiale, durch deren Integration man die Störungen der Coordinaten des gestörten Körpers ermitteln muſs, diese Coordinaten mögen beschaffen seyn wie sie wollen, kann man immer auf folgende Form bringen

$$P\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + Q\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) + R\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$$

wo P, Q und R Functionen der elliptischen Elemente und der Coordinaten des Kometen sind. Da nun zufolge des Vorhergehenden in diesem Ausdruck

keine unendlichen, nach den Potenzen der Excentricität und Neigung der Kometenbahn fortschreitenden Reihen vorkommen dürfen, so müssen im vorliegenden Falle die Coordinaten so gewählt werden, daſs P, Q und R ganze und rationale Functionen des Cosinus und Sinus der excentrischen Anomalie des Kometen seyen. Die Untersuchung der bekannten Ausdrücke für das Differential der Störungen der wahren Länge zeigt nun, daſs man diese nicht als die eine Coordinate annehmen kann, denn für diese sind P, Q und R keine ganzen und rationalen Functionen von $\sin u$ und $\cos u$. Wählen wir dahingegen die mittlere Länge, so können wir der verlangten Bedingung Gnüge leisten.

Wir müssen ferner, um dieser Bedingung Gnüge zu leisten, die Störungen des Radius Vectors, oder vielmehr des Logarithmus desselben, so bestimmen, daſs der rein elliptische Theil des Ausdrucks desselben durch Anwendung der durch die Störungen bereits verbesserten, wahren oder excentrischen Anomalie berechnet werden muſs. Wollte man die Störungen des Radius Vectors so geben, daſs im rein elliptischen Theile desselben die durch die Störungen nicht verbesserte Anomalie angewandt werden müſste, — wie in unsern jetzigen Planetentafeln der Fall ist, — so würde man ebenfalls der verlangten Bedingung nicht gnügen können, wie die Untersuchung der bekannten Ausdrücke der so gestalteten Störungen zeigt.

Es ergiebt sich hieraus, daſs die Coordinaten, durch deren Einführung ich in der Planeten- und Mondtheorie auf einfachere Entwickelungen und stärker convergirende Reihen gekommen bin, in der gegenwärtigen Aufgabe nothwendig angewandt werden müssen.

29.

Nehmen wir die Function vor, die ich in den „*Fundamentis etc.*" T genannt habe, und machen darin die dort y genannte Gröſse gleich Null, da hier die mit der Zeit multiplicirten Glieder nicht fortgeschafft zu werden brauchen, so erhalten wir

$$T = \left\{ 2\frac{\varrho}{r}\cos(v_1-\lambda) - 1 + 2\frac{\varrho}{a(1-e^2)}\left[\cos(v_1-\lambda)-1\right]\right\}\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) \qquad \text{(A)}$$
$$+\, 2\frac{\varrho}{r}\sin(v_1-\lambda)\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\, r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

wo auſser den hier schon angewandten Bezeichnungen v_1 die wahre Länge in

der Bahn bedeutet, und ϱ und λ Functionen der unbestimmten Gröfse τ sind, die mit dieser und den betreffenden Elementen in der nemlichen Verbindung stehen, wie r und v_1 mit der Zeit t und denselben Elementen.

Es ist identisch

$$\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) = \left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

folglich, da $x = \frac{r}{a}\cos f$, $y = \frac{r}{a}\sin f$

$$\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)\frac{r}{a}\sin f + \left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\frac{r}{a}\cos f$$

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dx}\right)\frac{r}{a}\cos f + \left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\frac{r}{a}\sin f$$

ferner

$$v_1 - \lambda = f - \varphi; \quad ndt = \frac{r}{a}du$$

wo φ mit τ und den betreffenden Elementen eben so verbunden ist, wie f mit t und denselben Elementen. Substituiren wir diese Ausdrücke in den vorstehenden Ausdruck für T, nachdem derselbe mit dt multiplicirt worden ist, so ergiebt sich

$$Tdt = \left\{\frac{r^2}{a^2}\sin f - 2\frac{r\varrho}{a^2}\sin\varphi + 2\frac{r\sin f}{a^3(1-e^2)}(r\varrho - r\varrho\cos f\cos\varphi) - 2\frac{r^2\varrho}{a^3(1-e^2)}\sin\varphi\sin^2 f\right\}\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)du$$
$$+\left\{2\frac{r\varrho}{a^2}\cos\varphi - \frac{r^2}{a^2}\cos f + 2\frac{r}{a^3(1-e^2)}(r\varrho\cos\varphi - \varrho r\cos f) - 2\frac{r^2\varrho}{a^3(1-e^2)}\cos\varphi\sin^2 f\right.$$
$$\left. + 2\frac{r^2\varrho}{a^3(1-e^2)}\sin\varphi\sin f\cos f\right\}\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)du$$

Führen wir nun die der excentrischen Anomalie analoge Function von τ ein, und nennen sie v, dann ist

$$\frac{\varrho}{a} = 1 - e\cos v; \qquad \frac{r}{a} = 1 - e\cos u$$

$$\frac{\varrho}{a}\cos\varphi = \cos v - e \qquad \frac{r}{a}\cos f = \cos u - e$$

$$\frac{\varrho}{a}\sin\varphi = \sqrt{1-e^2}\,.\,\sin v; \quad \frac{r}{a}\sin f = \sqrt{1-e^2}\,.\,\sin u$$

$$\frac{r\varrho}{a^2} - \frac{r\varrho}{a^2}\cos f\cos\varphi = (1-e^2)(1-\cos v\cos u)$$

$$\frac{r\varrho}{a^2}\cos\varphi - \frac{r\varrho}{a^2}\cos f = (1-e^2)(\cos v - \cos u)$$

hiemit

$$Tdt = \sqrt{1-e^2}\left\{3\sin u - \tfrac{1}{2}e\sin 2u - 3\sin v + e\sin(v-u) + e\sin(v+u) + \sin(v-2u)\right\}\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)du$$
$$+\left\{\tfrac{3}{2}e - (3-e^2)\cos u + \tfrac{1}{2}e\cos 2u + 3\cos v - 3e\cos(v-u) - e\cos(v+u) + \cos(v-2u)\right\}\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)du$$

woraus ersichtlich ist, daſs diese Function, von welcher die Differentiale der Störungen der mittleren Länge und der correspondirenden des Logarithmus des Radius Vectors abhängen, die verlangte Eigenschaft besitzt.

30.

Ehe ich weiter gehe, werde ich über die Form dieser Störungen und ihre Anwendung das Nöthige anführen. In den „*Fundamentis etc.*" habe ich bewiesen, daſs man aus T die Störungen der mittleren Länge und des Logarithmus des Radius Vectors auf folgende Weise erhält, wenn man für's Erste nur die erste Potenz der störenden Kraft berücksichtigt.

Man berechne W durch folgenden Ausdruck

$$W = -b + 2\xi\left(\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \tfrac{3}{2}e\right) - 2\eta\frac{\varrho}{a}\sin\varphi + \int Tdt$$

wo die auſserhalb des Integralzeichens stehende Gröſse diejenige ist, die der Integration als sogenannte willkührliche Constante hinzugefügt worden, und in der unter dem Integralzeichen befindlichen Gröſse v constant ist. Hiemit erhalten wir die gestörte mittlere Länge, oder mittlere Anomalie nz und die Störungen des hyperbolischen Logarithmus des Radius Vectors w durch folgende Ausdrücke

$$nz = g + n\int\overline{W}dt$$
$$w = C + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}e\xi - \tfrac{1}{2}\int\left(\overline{\frac{dW}{d\tau}}\right)dt$$

wo g die ungestörte mittlere Anomalie, oder wenn man will, mittlere Länge bedeutet, und der Strich über der Function W und deren Differentialquotienten anzeigt, daſs in denselben τ in t verwandelt werden muſs. Es sind ferner in diesen Ausdrücken b, ξ und η kleine, nach Maaſsgabe der stattfindenden Umstände zu bestimmende Gröſsen. Wenn man, wie in dem hier berechneten Beispiel geschehen ist, osculirende Elemente der Berechnung der Störungen zu Grunde legt, dann müssen diese drei Gröſsen so bestimmt wer-

den, wie ich in der, in den Astr. Nachr. No. 428. u. f. abgedruckten Abhandlung gezeigt habe. Die Gröfse C ist zufolge den „*Fundament. etc.*" pag. 149, wenn man vorläufig nur auf die erste Potenz der störenden Kraft Rücksicht nimmt, das constante Glied in $-\frac{1}{2}\frac{d\delta z}{dt}$.

Wendet man osculirende elliptische Elemente des gestörten Körpers als Grundlage der Berechnung der Störungen desselben an, so ist a. a. O., wenn man nur die erste Potenz der störenden Kraft berücksichtigt, gezeigt worden, dafs b, ξ und η durch folgende Ausdrücke bestimmt werden müssen

$$b=\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)-3\frac{(r)\,e\sin(f)}{an\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dw}{dt}\right)-\frac{2+e^2+3e\cos(f)}{1-e^2}\left\{2\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)+3(w)\right\}$$
$$\xi=-\frac{(r)\sin(f)}{an\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dw}{dt}\right)-\frac{\cos(f)+e}{1-e^2}\left\{2\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)+3(w)\right\}$$
$$\eta=-\frac{(r)\cos(f)}{an\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dw}{dt}\right)+\frac{\sin(f)}{1-e^2}\left\{2\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)+3(w)\right\}$$

wo (r), (f), $\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)$, (w) und $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ die numerischen Werthe der Gröfsen r, f, $\frac{d\delta z}{dt}$, w und $\frac{dw}{dt}$ sind, welche für die Zeit, für welche die angewandten osculirenden Elemente gelten, statt finden. Wendet man, wie hier geschehen, nicht die osculirende mittlere Bewegung, sondern die aus möglichst weit von einander abstehenden Beobachtungen ermittelte an, so finden die vorstehenden Ausdrücke für ξ und η noch statt, aber der Ausdruck für b verliert seine Geltung. In diesem Falle mufs b so bestimmt werden, dafs in dem Ausdrucke für nz aufser der der Rechnung zu Grunde gelegten mittleren Bewegung kein der Zeit proportionales Glied vorkommt. Es sind übrigens a. a. O. für die Bestimmung dieser Gröfsen strenge Ausdrücke, oder mit andern Worten Ausdrücke, die für alle Potenzen der störenden Kräfte gelten, so wie eine Bedingungsgleichung für diese Bestimmung von b gegeben worden.

31.

Zur Berechnung der Breitenstörungen ist es am zweckmäfsigsten, die Elemente, welche ich in den „*Fundamentis etc.*" p und q genannt habe, oder statt ihrer selbst einfache Transformationen derselben anzuwenden.

Verwandeln wir die Differentialquotienten der Störungsfunction nach P und Q durch die in den „*Fundamentis etc.*" gegebenen Gleichungen in die nach I, v und k, so gehen die dort pag. 101 für die Differentiale von p und q gegebenen Ausdrücke in folgende über

$$\frac{dp}{dt} = \frac{an\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\cos(N+K-\pi) - \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}I - \left(\frac{d\Omega}{dk}\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}I\right]\sin(N+K-\pi)\right\}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{an\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\sin(N+K-\pi) + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}I - \left(\frac{d\Omega}{dk}\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}I\right]\cos(N+K-\pi)\right\}$$

wo π die zur Zeitepoche stattfindende Länge des Perihels des Kometen ist. Da nun

$$\left(\frac{d\Omega}{dI}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\left(\frac{dH}{dI}\right)$$
$$\left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\left(\frac{dH}{d\nu}\right)$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dk}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\left(\frac{dH}{dk}\right)$$

ist, so bekommen wir aus den Gleichungen (X) des Art. 20.

$$\left(\frac{d\Omega}{dI}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\sin I\sin(f+N+K)\sin(f'+N-K)$$

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}I - \left(\frac{d\Omega}{dk}\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}I\right] = -\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\sin I\cos(f+N+K)\sin(f'+N-K)$$

Außerdem wurde dort gefunden, daſs

$$\left(\frac{d\Omega}{ds}\right) = \frac{a}{r}\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\sin I\sin(f'+N-K)$$

Hierdurch gehen die vorstehenden Gleichungen in folgende über

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -n\cos i\,\frac{r}{a}\sin(f+\pi)\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{ds}\right)\\ \frac{dq}{dt} &= -n\cos i\,\frac{r}{a}\cos(f+\pi)\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{ds}\right)\end{aligned}\right\}\text{.......... (A)}$$

welche, da die Factoren von $\left(\frac{d\Omega}{ds}\right)$ nur die veränderlichen Functionen $r\sin f$ und $r\cos f$ enthalten, gleichfalls der verlangten Bedingung gnügen.

Um hieraus die Breite oder Abweichung des Kometen über der Fundamentalebene zu berechnen haben wir, wenn wir den Sinus derselben s nennen, aus den „*Fundamentis etc.*"

$$\begin{aligned} s &= \sin i\sin(v_1 - \chi + \omega)\\ p &= \sin i\sin(\chi - \omega)\\ q &= \sin i\cos(\chi - \omega)\\ v_1 &= f + \pi\end{aligned}$$

also

$$s = q\sin(f+\pi) - p\cos(f+\pi)$$

Diese Gleichung zeigt zuerst, wenn man sie mit den obigen Ausdrücken für $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dq}{dt}$ vergleicht, daſs π im Endresultat verschwinden wird. Wir können daher eine Vereinfachung dadurch einführen, daſs wir diese Gröſse sogleich fortschaffen. Sey zu dem Ende

$$p_1 = \sin i \sin(\chi - \omega - \pi) = p \cos\pi - q \sin\pi$$
$$q_1 = \sin i \cos(\chi - \omega - \pi) = p \sin\pi + q \cos\pi$$

durch deren Differentiation wir in Folge der obigen Gleichungen (A) bekommen

(B) ....
$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -n \cos i \frac{r}{a} \sin f \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dz}\right) \\ \frac{dq_1}{dt} &= -n \cos i \frac{r}{a} \cos f \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dz}\right) \end{aligned}\right.$$

und

$$s = q_1 \sin f - p_1 \cos f$$

Setzen wir nun

$$p_1 = (p_1) + \delta p_1$$
$$q_1 = (q_1) + \delta q_1$$

wo (p_1) und (q_1) die der Integration hinzuzufügenden Constanten, und also δp_1 und δq_1 die Störungen von p_1 und q_1 sind, so ergiebt sich, wenn wir mit δs die Störungen von s bezeichnen

(C) ....
$$\delta s = \delta q_1 \sin f - \delta p_1 \cos f$$

Die eben mit (p_1) und (q_1) bezeichneten Constanten haben, wenn der Berechnung der Störungen osculirende Elemente des gestörten Körpers zu Grunde gelegt worden sind, der im vorhergehenden Artikel angezogenen Abhandlung zufolge, folgende Form *)

$$(p_1) = -\sin i \sin\omega - (\delta p_1)$$
$$(q_1) = \sin i \cos\omega - (\delta q_1)$$

wo (δp_1) und (δq_1) die numerischen Werthe der Störungen δp_1 und δq_1 sind, welche dem Zeitpunkte, für welchen die angewandten osculirenden Elemente gelten, zukommen.

---

*) Ich bemerke, daſs die hier p_1 und q_1 genannten Gröſsen von den in den *Fundamentis* und der angeführten Abhandlung eben so bezeichneten, in Bezug auf den Anfangspunkt derselben verschieden sind, weshalb hier in den Constanten $\sin\omega$ und $\cos\omega$ vorkommen, während dort $\sin\Phi$ und $\cos\Phi$ enthalten sind.

Die Gleichung (C) zeigt, daſs man die Breitenstörungen nicht durch eine stark convergirende Reihe ausdrücken kann, aber man kann statt dessen die mit dem Radius multiplicirten Breitenstörungen in solche Reihen ausdrücken, denn wir haben

$$r\delta s = \delta q_1 \,.\, r\sin f - \delta p_1 \,.\, r\cos f$$

wo die Factoren ganze und rationale Functionen von sin u und cos u sind. Die Gröſse $r\delta s$ ist zur Anwendung immer eben so einfach wie δs selbst, denn die Division mit dem Radius nach der Berechnung der Störungen für irgend einen Zeitpunkt aus den allgemeinen Ausdrücken kostet eines Theils nur wenige Mühe, andern Theils werden aber auch zur Berechnung der geocentrischen Oerter oftmals Ausdrücke angewandt, die $r\delta s$ verlangen, in welchem Falle die vorstehende Gleichung sogleich die verlangte Gröſse giebt.

32.

Man erhält somit die gestörte mittlere Anomalie nz, die Störungen w des hyperbolischen Logarithmus des Radius Vectors, die man durch Multiplication mit dem Modul M der Brigg'schen Logarithmen auf die Störungen dieses Logarithmus des Radius Vectors hinführt, und die Störungen δs der Breite oder Abweichung des Kometen über der angenommenen Fundamentalebene. Aus diesen Gröſsen ergeben sich die auf die Fundamentalebene reducirte heliocentrische Länge l, die Breite oder Abweichung b und der Radius Vector r auf folgende Art. Man berechne $\bar{u}$, $\bar{f}$ und log. br. $\bar{r}$ durch folgende Formeln

$$\bar{u} - e\sin\bar{u} = nz$$
$$\bar{r}\cos\bar{f} = a\cos\bar{u} - ae$$
$$\bar{r}\sin\bar{f} = a\sqrt{1-e^2}\,.\,\sin\bar{u}$$

wo a und e unveränderliche Elemente sind. Hierauf bekommt man

$$\text{log. br. } r = \text{log. br. } \bar{r} + Mw$$
$$\sin b = \sin i \sin(\bar{f} + \omega) + \delta s$$
$$l = \bar{f} + \omega + \theta + R - \delta s \,\frac{\operatorname{tg} i \cos(\bar{f} + \omega)}{\cos^2 b}$$

wo

$$\operatorname{tg} R = -\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} i \sin 2(\bar{f}+\omega)}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} i \cos 2(\bar{f}+\omega)}$$

und i, ω, θ ebenfalls die im Vorhergehenden mit denselben Buchstaben bezeichneten unveränderlichen Elemente des Kometen sind. Diese sind die Ausdrücke der „*Fundamenta etc.*", wenn man in denselben die dort für die Mondtheorie mit y, α und η bezeichneten Gröfsen gleich Null macht, und in dem Ausdrucke für die reducirte Länge die vom Quadrate und die höheren Potenzen der Störungen abhängigen Glieder wegläfst.

Wenn man in den vorstehenden Ausdrücken durch i, ω und θ, so wie in den Ausdrücken des vorhergehenden Artikels durch i die Kometenbahn auf die Ecliptik bezieht, so bekommt man durch dieselben für l die heliocentrische Länge in der Ecliptik, und für b die heliocentrische Breite des Kometen, bezieht man aber durch i, ω und θ die Kometenbahn auf den Aequator, so ist l die heliocentrische grade Aufsteigung und b die heliocentrische Abweichung desselben.

Andere Ausdrücke zur Ermittelung derselben Gröfsen sind, wenn man gleichfalls in der Reduction der Länge oder graden Aufsteigung die vom Quadrate und den höheren Potenzen abhängigen Glieder wegläfst, die folgenden

$$\begin{aligned} \cos b \cos(l-\theta) &= \cos(\bar{f}+\omega) \\ \cos b \sin(l-\theta) &= \cos i \sin(\bar{f}+\omega) - \delta s \operatorname{tg} i \\ \sin b &= \sin i \sin(\bar{f}+\omega) + \delta s \end{aligned}$$

welche ebenfalls b und l auf die Ecliptik oder den Aequator bezogen geben, jenachdem man die constanten Elemente i, ω und θ auf diese oder jene Ebene bezieht. Diese Ausdrücke habe ich, bis auf die dritte Potenz der störenden Kraft incl. entwickelt, in den Astr. Nachr. No. 423 u. f. gegeben. Multiplicirt man sie mit r, $r \cos\theta$ und $r \sin\theta$, und setzt

$$\begin{aligned} X &= r \cos b \cos l \\ Y &= r \cos b \sin l \\ Z &= r \sin b \end{aligned}$$

so ergeben sich leicht folgende

$$\begin{aligned} X &= ra \sin(\bar{f}+\omega+A) + r\delta s \sin\theta \operatorname{tg} i \\ Y &= rb_1 \sin(\bar{f}+\omega+B) - r\delta s \cos\theta \operatorname{tg} i \\ Z &= r \sin i \sin(\bar{f}+\omega) + r\delta s \end{aligned}$$

wo

$$a \sin A = \cos\theta$$
$$a \cos A = -\sin\theta\cos i$$
$$b_1 \sin B = \sin\theta$$
$$b_1 \cos B = \cos\theta\cos i$$

gesetzt worden sind.

Diese sind, abgesehen von der Form der Störungen, die bekannten Gaufs'schen Coordinaten, wenn man i, ω und θ auf den Aequator bezieht.

Bei der Anwendung dieser Ausdrücke kann man die Präcession und Nutation auf einfache Art berücksichtigen. Nennt man die Schiefe der Ecliptik ε, die Nutation derselben $\varDelta\varepsilon$, die Nutation der Länge $\varDelta\psi$, die jährliche Lunisolarpräcession ζ, die jährliche allgemeine Präcession ζ', und setzt

$$\xi = -\varDelta\psi\sin\varepsilon\cos i\sin\theta + \varDelta\varepsilon\cos i\cos\theta - t\zeta\sin\varepsilon\cos i\sin\theta$$
$$\lambda = \varDelta\psi\frac{\sin\varepsilon}{\sin i}\cos\theta + \varDelta\varepsilon\frac{\sin\theta}{\sin i} + t\zeta\frac{\sin\varepsilon}{\sin i}\cos\theta$$
$$\lambda' = \varDelta\psi\left\{\cos\varepsilon - \frac{\cos i}{\sin i}\sin\varepsilon\cos\theta\right\} - \varDelta\varepsilon\frac{\cos i}{\sin i}\sin\theta$$
$$+ t\left\{\zeta\left[\cos\varepsilon - \frac{\cos i}{\sin i}\sin\varepsilon\cos\theta\right] + \zeta' - \zeta\right\}$$

welche Gröfsen für jeden Kometen leicht ein für allemal in Tafeln gebracht werden können, ferner

$$\delta' s = \xi\sin(\bar{f} + \lambda + \omega)$$

dann hat man

$$\cos b\cos(l - \lambda' - \theta) = \cos(\bar{f} + \lambda + \omega)$$
$$\cos b\sin(l - \lambda' - \theta) = \cos i\sin(\bar{f} + \lambda + \omega) - \{\delta s + \delta' s\}\operatorname{tg} i$$
$$\sin b = \sin i\sin(\bar{f} + \lambda + \omega) + \delta s + \delta' s$$

*) wo nothwendig, so wie in den vorstehenden Hülfsgleichungen i, ω und θ auf die zu Grunde gelegte feste Ebene des Aequators bezogen werden müssen, und demzufolge l die heliocentrische grade Aufsteigung, und b die ho-

*) Die geometrische Bedeutung der Gröfsen ξ, λ, λ' ist leicht zu finden. Man kann denselben auch die in p_1 und q_1 enthaltenen Säcularänderungen einverleiben, wie ich a. a. O. gethan habe.

mologe Abweichung des Kometen in Beziehung auf die zur Zeit t stattfindende (veränderliche) Ebene des Aequators bedeuten *).

Für den Encke'schen Kometen habe ich in Bezug auf den Aequator gefunden

$$\begin{aligned} i &= 35^\circ\, 56'\, 17'' \\ \theta &= 350\;\; 14\;\; 59 \\ \omega &= 165\;\; 49\;\; 54 \end{aligned}$$

und hieraus mit Zugrundlegung der Lindenau'schen und Bessel'schen Constanten der Nutation und Präcession

$$\begin{aligned} \lambda = & -11'',219 \sin \Omega - 2'',590 \cos \Omega + 0'',135 \sin 2\Omega + 0'',006 \cos 2\Omega \\ & - 0'',893 \sin 2\odot - 0'',167 \cos 2\odot \\ & + t \,.\, 33'',6627 \\ \lambda' = & -6'',312 \sin \Omega + 2'',097 \cos \Omega + 0'',076 \sin 2\Omega - 0'',021 \cos 2\Omega \\ & - 0'',502 \sin 2\odot + 0'',136 \cos 2\odot \\ & + t \,.\, 18'',8133 \\ \xi = & -0'',916 \sin \Omega + 7'',166 \cos \Omega + 0'',011 \sin 2\Omega - 0'',070 \cos 2\Omega \\ & - 0'',073 \sin 2\odot + 0'',463 \cos 2\odot \\ & + t \,.\, 2'',7488 \end{aligned}$$

wo Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn gegen die Ecliptik, und $\odot$ die Länge der Sonne bedeutet. Diese Formeln sind das Ergebniſs der Theorie, die ich in den Astr. Nachr. No. 244 u. f. und No. 295 u. f. publicirt habe. Ich bemerke hiezu, daſs mit Rücksicht auf die Quadrate und höheren Potenzen der Präcession und Nutation bei der Anwendung dieser Theorie die Form der Gleichungen, sowohl der der *„Fundamenta etc."*, wie der der Abhandlung in No. 423 u. f. der Astr. Nachr. unverändert bleibt. Wenden wir diese Art der Berücksichtigung der Präcession und Nutation auf

---

*) Um Alles beisammen zu haben, führe ich hier die Formeln an, durch welche man i, θ und ω, die gemeiniglich auf die Ecliptik bezogen gegeben sind, auf den Aequator bezieht. Sie sind

$$\begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2} (\omega - \omega_0 + \theta) &= \sin \tfrac{1}{2} \theta_0 \cos \tfrac{1}{2} (\varepsilon - i_0) \\ \cos \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2} (\omega - \omega_0 + \theta) &= \cos \tfrac{1}{2} \theta_0 \cos \tfrac{1}{2} (\varepsilon + i_0) \\ \sin \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2} (\omega - \omega_0 - \theta) &= \sin \tfrac{1}{2} \theta_0 \sin \tfrac{1}{2} (\varepsilon - i_0) \\ \sin \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2} (\omega - \omega_0 - \theta) &= \cos \tfrac{1}{2} \theta_0 \sin \tfrac{1}{2} (\varepsilon + i_0) \end{aligned}$$

wo i_0, θ_0 und ω_0 sich auf die Ecliptik, und i, θ und ω sich auf den Aequator beziehen.

die **Gaufs'schen** Coordinaten an, so erhalten wir, wenn wir nur die erste Potenz von λ' berücksichtigen,

$$X = ra\sin(\bar{f}+\lambda+\omega+A)-\lambda' rb_1 \sin(\bar{f}+\lambda+\omega+B)+r\{\delta s+\delta' s\}\sin\theta \operatorname{tg} i$$
$$Y = rb_1\sin(\bar{f}+\lambda+\omega+B)+\lambda' ra \sin(\bar{f}+\lambda+\omega+A)-r\{\delta s+\delta' s\}\cos\theta \operatorname{tg} i$$
$$Z = r \sin i \sin(\bar{f}+\lambda+\omega)+r\{\delta s+\delta' s\}$$

33.

Nach dieser Digression über die Form der Störungen und ihre Anwendung fahre ich mit der Entwickelung der Gröfse Tdt fort. Um diese zu berechnen setze man

$$\begin{array}{llll}
 & & C_{0,0} = & \tfrac{3}{2}e \\
S_{0,1} = & \tfrac{3}{2}\sqrt{1-e^2}; & C_{0,1} = & -\tfrac{1}{2}(3-e^2) \\
S_{0,2} = & -\tfrac{1}{4}e\sqrt{1-e^2}; & C_{0,2} = & \tfrac{1}{4}e \\
S_{1,0} = & -\tfrac{3}{2}\sqrt{1-e^2}; & C_{1,0} = & \tfrac{3}{2} \\
S_{1,-1} = & \tfrac{1}{2}e\sqrt{1-e^2}; & C_{1,-1} = & -\tfrac{3}{2}e \\
S_{1,1} = & \tfrac{1}{2}e\sqrt{1-e^2}; & C_{1,1} = & -\tfrac{1}{2}e \\
S_{1,-2} = & \tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2}; & C_{1,-2} = & \tfrac{1}{2}
\end{array}$$

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) = \Sigma(i,i')_c \cos(iu+i'g')+\Sigma(i,i')_s \sin(iu+i'g')$$
$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) = \Sigma[i,i']_s \sin(iu+i'g')+\Sigma[i,i']_c \cos(iu+i'g')$$

dann ist zufolge des zu Ende des Art. 29. gegebenen Ausdrucks für Tdt

$$\begin{aligned}
\frac{Tdt}{du} = \;& \Sigma\left\{\begin{array}{l}[i,i']_s C_{0,0}+\{[i-1,i']_s+[i+1,i']_s\}C_{0,1}+\{[i-2,i']_s+[i+2,i']_s\}C_{0,2} \\ \qquad +\{(i-1,i')_c-(i+1,i')_c\}S_{0,1}+\{(i-2,i')_c-(i+2,i')_c\}S_{0,2}\end{array}\right\}\sin(iu+i'g') \\
&+\Sigma\left\{\begin{array}{l}[i,i']_c C_{0,0}+\{[i-1,i']_c+[i+1,i']_c\}C_{0,1}+\{[i-2,i']_c+[i+2,i']_c\}C_{0,2} \\ \qquad -\{(i-1,i')_s-(i+1,i')_s\}S_{0,1}-\{(i-2,i')_s-(i+2,i')_s\}S_{0,2}\end{array}\right\}\cos(iu+i'g') \\
&+\Sigma\left\{\begin{array}{l}[i+1,i']_s C_{1,0}+[i,i']_s C_{1,-1}+[i+2,i']_s C_{1,1}+[i-1,i']_s C_{1,-2} \\ -(i+1,i')_c S_{1,0}-(i,i')_c S_{1,-1}-(i+2,i')_c S_{1,1}-(i-1,i')_c S_{1,-2}\end{array}\right\}\sin[-v+(i+1)u+i'g'] \\
&+\Sigma\left\{\begin{array}{l}[i+1,i']_c C_{1,0}+[i,i']_c C_{1,-1}+[i+2,i']_c C_{1,1}+[i-1,i']_c C_{1,-2} \\ +(i+1,i')_s S_{1,0}+(i,i')_s S_{1,-1}+(i+2,i')_s S_{1,1}+(i-1,i')_s S_{1,-2}\end{array}\right\}\cos[-v+(i+1)u+i'g']
\end{aligned}$$

$$+\Sigma\left\{\begin{array}{l}[i-1,i']_0 C_{1,0}+[i,i']_0 C_{1,-1}+[i-2,i']_0 C_{1,1}+[i+1,i']_0 C_{1,-2}\\ +(i-1,i')_0 S_{1,0}+(i,i')_0 S_{1,-1}+(i-2,i')_0 S_{1,1}+(i+1,i')_0 S_{1,-2}\end{array}\right\}\sin[v+(i-1)u+i'g']$$

$$+\Sigma\left\{\begin{array}{l}[i-1,i']_0 C_{1,0}+[i,i']_0 C_{1,-1}+[i-2,i']_0 C_{1,1}+[i+1,i']_0 C_{1,-2}\\ -(i-1,i')_0 S_{1,0}-(i,i')_0 S_{1,-1}-(i-2,i')_0 S_{1,1}-(i+1,i')_0 S_{1,-2}\end{array}\right\}\cos[v+(i-1)u+i'g']$$

Das einfachste Verfahren diese Rechnung auszuführen, besteht darin, daſs man die Logarithmen der Coefficienten $(i,i')_0$, $[i,i']_1$, $(i,i')_1$, $[i,i']_0$ der Reihe nach hinschreibt, und die von $S_{1,0}$, etc. $C_{0,0}$, etc. auf den untern Rand eines besondern Streifens Papiers. Durch Anlegen dieses Streifens addirt man alle betreffenden Logarithmen, nemlich alle S zu jedem der (i,i'), und alle C zu jedem der $[i,i']$. Zugleich mit dem Aufschlagen der zu den Logarithmen der Producte gehörigen Zahlen schreibt man diese auf ein anderes Papier in die, den beiden Argumenten, welchen sie angehören, bestimmten Columnen. Diese Argumente werden durch Addition und Subtraction der Indices zu gleicher Zeit ermittelt, und die algebraischen Zeichen, so wie die Unterscheidung, ob die Producte Coefficienten eines Sinus oder Cosinus sind, ergeben sich durch die bekannten Formeln, welche die Producte von Sinussen und Cosinussen durch linearische Sinusse und Cosinusse geben, die wohl jeder auswendig weiſs. Die Berechnung von $\frac{Tdt}{du}$ geht auf diese Art sehr schnell von statten.

Wenn man nach vollbrachter Berechnung von Tdt die drei Coefficienten addirt, die nach der Verwandelung von v in u ein und dasselbe Argument haben würden, so bekommt man die Coefficienten der Gröſse

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right)dt$$

die am Schlusse der Rechnung zur Controle dienen wird. Man kann sie auch sogleich zu einer Controle benutzen, wenn man die beiden Multiplicationen, welche Tdt gegeben haben, mit der Abkürzung wiederholt, daſs man statt der Coefficienten S und C selbst die Aggregate

$$(S_{0,1}+S_{1,0}-S_{1,-2});\quad (S_{0,2}+S_{1,1})$$
$$(C_{0,0}+2C_{1,-1});\quad (C_{0,1}+C_{1,0}+C_{1,-2});\quad (C_{0,2}+C_{1,1})$$

anwendet. Hieraus muſs sich ebenfalls die eben genannte Gröſse ergeben.

Multiplicationen, wie die eben beschriebenen, sind in der Störungstheo-

rie das einzige Mittel, um die heut zu Tage erforderliche Genauigkeit auf dem kürzesten Wege zu erlangen. Es kann zu nichts führen, die analytischen Ausdrücke der Störungen bis zu Ende zu entwickeln, denn wenn man hiebei die erforderliche Genauigkeit erreichen will, so wird die Arbeit, die noch dazu bloſs ein algebraisches Exercitium ist, so lang und zeitraubend, daſs sie ohne Weglassungen doch nicht zu Stande gebracht wird. Nimmt man aber bei derselben dazu seine Zuflucht, so wird die Genauigkeit leicht zu sehr beeinträchtigt, da selten Mittel vorhanden sind, den Einfluſs der Weglassungen richtig zu würdigen. Auch ist es sehr schwer, und vielleicht einem Einzelnen unmöglich, die völlige Richtigkeit solcher algebraischen Entwickelungen zu verbürgen.

34.

Setzen wir

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = \Sigma\{i,i'\}_s \sin(iu+i'g') + \Sigma\{i,i'\}_c \cos(iu+i'g')$$

dann geben die Ausdrücke des Art. 31.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dp_1}{dt} = {} & \tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\,\Sigma\left\{\{i-1,i'\}_s - \{i+1,i'\}_s\right\}\cos(iu+i'g') \\ & + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\,\Sigma\left\{\{i+1,i'\}_c - \{i-1,i'\}_c\right\}\sin(iu+i'g') \\ \frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dq_1}{dt} = {} & \Sigma\left\{e\{i,i'\}_s - \tfrac{1}{2}\{i+1,i'\}_s - \tfrac{1}{2}\{i-1,i'\}_s\right\}\sin(iu+i'g') \\ & + \Sigma\left\{e\{i,i'\}_c - \tfrac{1}{2}\{i+1,i'\}_c - \tfrac{1}{2}\{i-1,i'\}_c\right\}\cos(iu+i'g')\end{aligned}$$

wo wohl überflüssig ist zu bemerken, daſs der Buchstabe i linker Hand unter dem Cosinuszeichen keinen Index, sondern die Neigung der Kometenbahn gegen die Fundamentalebene bedeutet. Der Werth $i' = 0$ bildet in diesen Formeln keinen Ausnahmefall, wenn man nur die Coefficienten der Sinusse und Cosinusse der negativen Vielfachen von u, so wie sie die Formel giebt, berechnet, und nachher mit den gleichen positiven Vielfachen, den Regeln der algebraischen Zeichen gemäſs, vereinigt.

35.

Zur Anwendung der in den beiden vorhergehenden Artikeln enthaltenen Rechnungsvorschriften auf unser Beispiel bekommt man

	$\log C_{0,0} = 0{,}1028$
$\log S_{0,1} = 9{,}9047$	- $C_{0,1} = 0{,}0582n$
- $S_{0,2} = 9{,}0533n$	- $C_{0,2} = 9{,}3247$
- $S_{1,0} = 9{,}9047n$	- $C_{1,0} = 0{,}1761$
- $S_{1,-1} = 9{,}3543$	- $C_{1,-1} = 0{,}1028n$
- $S_{1,1} = 9{,}3543$	- $C_{1,1} = 9{,}6257n$
- $S_{1,-2} = 9{,}4276$	- $C_{1,-2} = 9{,}6990$

und hiemit ergab sich durch die Vorschriften des Art. 33.

$$\frac{Tdt}{du}$$

k, i, i′	$kv+iu+i'g'$ sin ″	$kv+iu+i'g'$ cos ″
0, 0, 0		+0,0315
1, —1, 0	—1,067	—0,0630
		—0,0315
0, 1, 0	—0,772	—0,061
—1, 2, 0	—0,292	+0,036
1, 0, 0	+1,1544	+0,0750
	+0,090	+0,050
0, 2, 0	+0,419	+0,035
—1, 3, 0	—0,018	—0,012
1, 1, 0	—0,482	—0,049
	—0,081	—0,026
0, 3, 0	—0,053	—0,006
—1, 4, 0	0,000	0,000
1, 2, 0	+0,077	+0,011
	+0,024	+0,005
0, 4, 0	+0,009	+0,001
—1, 5, 0	—0,001	0,000
1, 3, 0	—0,012	—0,001
	—0,004	0,000
0, —4, 1	+0,004	—0,022
—1, —3, 1	—0,006	+0,037
1, —5, 1	0,000	+0,003
	—0,002	+0,018
0, —3, 1	—0,030	+0,182
—1, —2, 1	+0,032	—0,253
1, —4, 1	+0,005	—0,033
	+0,007	—0,104

k, i, i′	$kv+iu+i'g'$ sin ″	$kv+iu+i'g'$ cos ″
0, —2, 1	+0,035	—0,531
—1, —1, 1	—0,058	+0,704
1, —3, 1	+0,011	+0,115
	—0,012	+0,288
0, —1, 1	—0,019	+0,716
—1, 0, 1	+0,073	—1,029
1, —2, 1	—0,034	—0,154
	+0,020	—0,467
0, 0, 1	+0,038	—0,442
—1, 1, 1	—0,086	+0,795
1, —1, 1	+0,012	+0,088
	—0,036	+0,441
0, 1, 1	—0,042	+0,094
—1, 2, 1	+0,067	—0,332
1, 0, 1	+0,014	—0,021
	+0,039	—0,259
0, 2, 1	+0,007	+0,016
—1, 3, 1	—0,021	+0,069
1, 1, 1	—0,002	+0,005
	—0,016	+0,090
0, 3, 1	+0,004	—0,008
—1, 4, 1	+0,001	—0,004
1, 2, 1	0,000	—0,001
	+0,005	—0,013
0, —5, 2	—0,003	—0,002
—1, —4, 2	+0,008	+0,005
1, —6, 2	0,000	0,000

k, i, i′	$kv+iu+i'g'$ sin ″	$kv+iu+i'g'$ cos ″
	+0,005	+0,003
0, —4, 2	+0,046	+0,023
—1, —3, 2	—0,070	—0,030
1, —5, 2	—0,009	—0,006
	—0,033	—0,013
0, —3, 2	—0,540	—0,402
—1, —2, 2	+0,957	+0,766
1, —4, 2	+0,054	+0,015
	+0,471	+0,379
0, —2, 2	+2,872	+2,543
—1, —1, 2	—3,767	—3,338
1, —3, 2	—0,962	—0,836
	—1,857	—1,631
0, —1, 2	—4,256	—3,839
—1, 0, 2	+5,185	+4,660
1, —2, 2	+2,233	+2,014
	+3,162	+2,835
0, 0, 2	+2,851	+2,531
—1, 1, 2	—3,247	—2,877
1, —1, 2	—2,426	—2,183
	—2,822	—2,529
0, 1, 2	—1,032	—0,910
—1, 2, 2	+0,955	+0,820
1, 0, 2	+1,468	+1,329
	+1,391	+1,239
0, 2, 2	+0,227	+0,216
—1, 3, 2	—0,114	—0,092

$$\frac{Tdt}{dt}$$

k, i, i′	kv + iu + i′g′ sin	kv + iu + i′g′ cos	k, i, i′	kv + iu + i′g′ sin	kv + iu + i′g′ cos	k, i, i′	kv + iu + i′g′ sin	kv + iu + i′g′ cos
	″	″		″	″		″	″
1, 1, 2	−0,478	−0,444	0, 3, 3	+0,026	−0,025	1, 2, 4	−0,020	−0,034
	−0,365	−0,320	−1, 4, 3	−0,011	+0,007		−0,013	−0,027
0, 3, 2	−0,033	−0,030	1, 2, 3	−0,054	+0,052	0, −6, 5	+0,004	0,000
−1, 4, 2	+0,007	+0,004		−0,039	+0,034	−1, −5, 5	−0,008	−0,001
1, 2, 2	+0,071	+0,063	0, 4, 3	−0,003	+0,001	1, −7, 5	0,000	0,000
	+0,045	+0,037	−1, 5, 3	0,000	0,000		−0,004	−0,001
0, 4, 2	0,000	0,000	1, 3, 3	+0,007	−0,004	0, −5, 5	−0,042	−0,002
−1, 5, 2	−0,001	0,000		+0,004	−0,003	−1, −4, 5	+0,065	0,000
1, 3, 2	−0,004	0,000	0, −5, 4	+0,007	+0,032	1, −6, 5	+0,009	+0,002
	−0,005	0,000	−1, −4, 4	−0,013	−0,060		+0,032	0,000
0, −5, 3	+0,007	−0,009	1, −6, 4	−0,002	−0,002	0, −4, 5	+0,155	−0,032
−1, −4, 3	−0,012	+0,016		−0,008	−0,030	−1, −3, 5	−0,209	+0,051
1, −6, 3	−0,002	+0,002	0, −4, 4	−0,062	−0,223	1, −5, 5	−0,055	+0,004
	−0,007	+0,009	−1, −3, 4	+0,102	+0,317		−0,109	+0,023
0, −4, 3	−0,125	+0,100	1, −5, 4	+0,012	+0,062	0, −3, 5	−0,286	+0,125
−1, −3, 3	+0,234	−0,167		+0,052	+0,156	−1, −2, 5	+0,361	−0,163
1, −5, 3	+0,008	−0,016	0, −3, 4	+0,297	+0,569	1, −4, 5	+0,137	−0,043
	+0,117	−0,083	−1, −2, 4	−0,403	−0,735		+0,212	−0,081
0, −3, 3	+0,801	−0,582	1, −4, 4	−0,097	−0,235	0, −2, 5	+0,335	−0,203
−1, −2, 3	−1,077	+0,846		−0,203	−0,401	−1, −1, 5	−0,403	+0,253
1, −4, 3	−0,254	+0,159	0, −2, 4	−0,572	−0,762	1, −3, 5	−0,205	+0,100
	−0,530	+0,423	−1, −1, 4	+0,715	+0,931		−0,273	+0,150
0, −2, 3	−1,470	+1,561	1, −3, 4	+0,270	+0,426	0, −1, 5	−0,278	+0,197
−1, −1, 3	+1,837	−1,997		+0,413	+0,595	−1, 0, 5	+0,317	−0,233
1, −3, 3	+0,700	−0,643	0, −1, 4	+0,591	+0,662	1, −2, 5	+0,216	−0,131
	+1,067	−1,079	−1, 0, 4	−0,703	−0,769		+0,255	−0,167
0, −1, 3	+1,439	−1,920	1, −2, 4	−0,386	−0,484	0, 0, 5	+0,180	−0,126
−1, 0, 3	−1,709	+2,306		−0,498	−0,591	−1, 1, 5	−0,191	+0,140
1, −2, 3	−0,966	+1,128	0, 0, 4	−0,383	−0,424	1, −1, 5	−0,169	+0,115
	−1,236	+1,514	−1, 1, 4	+0,419	+0,457		−0,180	+0,129
0, 0, 3	−0,932	+1,261	1, −1, 4	+0,346	+0,388	0, 1, 5	−0,091	+0,058
−1, 1, 3	+1,023	−1,408		+0,382	+0,421	−1, 2, 5	+0,087	−0,054
1, −1, 3	+0,844	−1,114	0, 1, 4	+0,162	+0,203	1, 0, 5	+0,103	−0,069
	+0,935	−1,261	−1, 2, 4	−0,153	−0,198		+0,099	−0,065
0, 1, 3	+0,413	−0,506	1, 0, 4	−0,203	−0,232	0, 2, 5	+0,039	−0,016
−1, 2, 3	−0,397	+0,462		−0,194	−0,227	−1, 3, 5	−0,030	+0,014
1, 0, 3	−0,500	+0,678	0, 2, 4	−0,047	−0,072	1, 1, 5	−0,051	+0,026
	−0,484	+0,634	−1, 3, 4	+0,033	+0,059		−0,042	+0,024
0, 2, 3	−0,123	+0,142	1, 1, 4	+0,078	+0,104	0, 3, 5	−0,013	+0,002
−1, 3, 3	+0,090	−0,082		+0,064	+0,091	−1, 4, 5	+0,007	−0,001
1, 1, 3	+0,199	−0,253	0, 3, 4	+0,011	+0,018	1, 2, 5	+0,021	−0,006
	+0,166	−0,193	−1, 4, 4	−0,004	−0,011		+0,015	−0,005

$\frac{Tdt}{dt}$								
k, i, i'	kv + iu + i'g' sin	kv + iu + i'g' cos	k, i, i'	kv + iu + i'g' sin	kv + iu + i'g' cos	k, i, i'	kv + iu + i'g' sin	kv + iu + i'g' cos
	"	"		"	"		"	"
0,—5,6	+0,010	—0,031	0,—2,6	+0,045	+0,128	0,1,6	—0,015	—0,031
—1,—4,6	—0,013	+0,045	—1,—1,6	—0,055	—0,151	—1,2,6	+0,014	+0,030
1,—6,6	—0,004	+0,009	1,—3,6	—0,024	—0,088	1,0,6	+0,017	+0,034
	—0,007	+0,023		—0,034	—0,111		+0,016	+0,033
0,—4,6	—0,002	+0,082	0,—1,6	—0,040	—0,099	0,2,6	+0,008	+0,011
—1,—3,6	—0,002	—0,108	—1, 0,6	+0,048	+0,110	—1,3,6	—0,005	—0,009
1,—5,6	+0,005	—0,035	1,—2,6	+0,031	+0,081	1,1,6	—0,011	—0,015
	+0,001	—0,061		+0,039	+0,092		—0,008	—0,013
0,—3,6	—0,025	—0,127	0, 0,6	+0,027	+0,063	0,3,6	—0,002	—0,002
—1,—2,6	+0,034	+0,156	—1, 1,6	—0,029	—0,065	—1,4,6	+0,001	+0,001
1,—4,6	+0,007	+0,067	1,—1,6	—0,029	—0,057	1,2,6	+0,003	+0,005
	+0,016	+0,096		—0,031	—0,058		+0,002	+0,004

Die Zahlen, welche in jedem Abschnitte dieser Tafeln sich in der vierten Zeile befinden, sind die Summe der drei darüberstehenden, und folglich die Coefficienten der Gröfse $\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right)dt$.

36.

Zur Ausführung der im Art. 34. erklärten Rechnungen haben wir

$$\log \tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2} = 9{,}4275; \quad \log e = 9{,}9267$$

Hiemit und mit dem im Art. 26. gegebenen Werthe von $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{ds}\right)$ ergab sich

	$\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dp_1}{dt}$		$\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dq_1}{dt}$			$\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dp_1}{dt}$		$\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dq_1}{dt}$	
	$(iu+i'g')$		$(iu+i'g')$			$(iu+i'g')$		$(iu+i'g')$	
i, i'	cos	sin	sin	cos	i, i'	cos	sin	sin	cos
	"			"		"	"	"	"
0, 0	+0,0842	"	"	+0,1383	0, 3	−0,029	−0,020	+0,223	−0,204
1, 0	−0,0073	−0,048	−0,280	−0,1985	1, 3	+0,032	+0,034	−0,121	+0,115
2, 0	−0,082	+0,030	+0,184	+0,068	2, 3	−0,016	−0,014	+0,040	−0,032
3, 0	+0,007	−0,003	−0,021	−0,007	−3, 4	−0,004	+0,016	−0,012	−0,046
−3, 1	+0,001	−0,019	+0,003	+0,040	−2, 4	+0,011	−0,015	+0,030	+0,087
−2, 1	−0,018	+0,011	−0,038	−0,088	−1, 4	−0,005	−0,002	−0,057	−0,119
−1, 1	+0,026	+0,041	+0,110	+0,036	0, 4	−0,007	+0,013	+0,053	+0,095
0, 1	+0,003	−0,040	−0,148	+0,093	1, 4	+0,008	−0,012	−0,027	−0,050
1, 1	−0,021	−0,014	+0,109	−0,141	2, 4	−0,003	+0,007	+0,008	+0,018
2, 1	+0,015	+0,025	−0,049	+0,076	−4, 5	−0,004	0,000	−0,011	0,000
3, 1	−0,006	−0,008	+0,013	−0,018	−3, 5	+0,006	+0,002	+0,029	−0,004
−3, 2	−0,006	−0,003	−0,022	+0,002	−2, 5	−0,004	−0,003	−0,045	+0,015
−2, 2	−0,070	+0,101	−0,099	−0,192	−1, 5	−0,002	+0,001	+0,047	−0,021
−1, 2	+0,088	−0,108	+0,353	+0,526	0, 5	+0,005	+0,004	−0,034	+0,019
0, 2	+0,038	−0,063	−0,439	−0,605	1, 5	−0,004	−0,003	+0,020	−0,011
1, 2	−0,079	+0,108	+0,251	+0,329	2, 5	+0,003	+0,001	−0,008	+0,004
2, 2	+0,029	−0,036	−0,066	−0,079	−3, 6	+0,001	−0,003	0,000	+0,012
3, 2	−0,003	+0,003	+0,009	+0,008	−2, 6	−0,001	+0,001	−0,003	−0,017
−3, 3	−0,026	−0,006	−0,048	+0,009	−1, 6	0,000	+0,002	+0,005	+0,016
−2, 3	+0,045	+0,035	+0,166	−0,082	0, 6	+0,001	−0,002	−0,005	−0,011
−1, 3	−0,009	−0,030	−0,256	+0,188	1, 6	−0,001	+0,001	+0,002	+0,006

womit die Entwickelung der Differentiale beendigt ist.

§. IV.

Integration der Differentiale des vorhergehenden Paragraphen.

37.

Die zu integrirenden Functionen haben alle entweder die Form

$$a \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} (iu + i'g' + A)\, du$$

oder

$$na \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} (iu + i'g' + A)\, dt$$

wo a und A von u und t unabhängig sind. Ich werde zuerst zeigen, wie man das Integral der zweiten Form auf das der ersten zurückführen kann, dann das allgemeine Integral dieser geben, und hierauf die Anwendung dieser allgemeinen Ausdrücke auf die Entwickelungen des vorhergehenden Paragraphen darlegen.

38.

Da

$$ndt = (1 - e \cos u)\, du$$

ist, so erhalten wir sogleich

$$na\int \sin (iu+i'g'+A)\, dt = a\int \sin (iu+i'g'+A)\, du - \tfrac{1}{2}\, ea\int \sin [(i+1)\, u + i'g' + A]\, du$$
$$- \tfrac{1}{2}\, ea\int \sin [(i-1)\, u + i'g' + A]\, du$$

$$na\int \cos (iu+i'g'+A)\, dt = a\int \cos (iu+i'g'+A)\, du - \tfrac{1}{2}\, ea\int \cos [(i+1)\, u + i'g' + A]\, du$$
$$- \tfrac{1}{2}\, ea\int \cos [(i-1)\, u + i'g' + A]\, du$$

Außer dieser ist aber noch eine andere Art möglich, die bei der Anwendung auf eine einfachere Rechnung führt, man erhält sie durch theilweise Integration des gegebenen Ausdrucks. Da

$$g' = n't + c'$$

wo c' eine Constante ist, so bekommen wir auf die genannte Weise

$$na\int \sin(iu+i'g'+A)\,dt = -\frac{a}{i'\nu}\cos(iu+i'g'+A) - \frac{ia}{i'\nu}\int \sin(iu+i'g'+A)\,du$$
$$na\int \cos(iu+i'g'+A)\,dt = \frac{a}{i'\nu}\sin(iu+i'g'+A) - \frac{ia}{i'\nu}\int \cos(iu+i'g'+A)\,du$$

wo

$$\nu = \frac{n'}{n}$$

gesetzt worden ist. Man ist, wie man sieht, bei Anwendung dieser zweiten Art der Multiplication mit $(1-e\cos u)$ überhoben. Dieses Verfahren ist aber nicht anwendbar, wenn $i'=0$ ist, in welchem Falle man daher das erste anwenden mufs. Dieses giebt aber alsdann

$$na\int \sin(iu+A)\,dt = -\frac{a}{i}\cos(iu+A) + \frac{\frac{1}{2}ea}{i+1}\cos\big((i+1)u+A\big) + \frac{\frac{1}{2}ea}{i-1}\cos\big((i-1)u+A\big)$$
$$na\int \cos(iu+A)\,dt = \frac{a}{i}\sin(iu+A) - \frac{\frac{1}{2}ea}{i+1}\sin\big((i+1)u+A\big) - \frac{\frac{1}{2}ea}{i-1}\sin\big((i-1)u+A\big)$$

wo überdies noch Ausnahmen eintreten, wenn $i=0$, $i=1$ oder $i=-1$ ist. Es wird nemlich

1) wenn $i=0$

$$na\int \sin A\,dt = ant\sin A$$
$$na\int \cos A\,dt = ant\cos A$$

2) wenn $i=1$

$$na\int \sin(u+A)\,dt = -a\cos(u+A) + \tfrac{1}{4}ea\cos(2u+A) - \tfrac{1}{2}ea\,u\sin A$$
$$na\int \cos(u+A)\,dt = a\sin(u+A) - \tfrac{1}{4}ea\sin(2u+A) - \tfrac{1}{2}ea\,u\cos A$$

oder wenn wir u durch die Gleichung

$$u = nt + e \sin u$$

eliminiren

$$na \int \sin (u + A)\, dt = -\tfrac{1}{2}\, eant \sin A - \tfrac{1}{4}\, e^2 a \cos(-u + A)$$
$$- a (1 - \tfrac{1}{4} e^2) \cos (u + A) + \tfrac{1}{4}\, ea \cos (2u + A)$$
$$na \int \cos (u + A)\, dt = -\tfrac{1}{2}\, eant \cos A + \tfrac{1}{4}\, e^2 a \sin(-u + A)$$
$$+ a (1 - \tfrac{1}{4} e^2) \sin (u + A) - \tfrac{1}{4}\, ea \sin (2u + A)$$

welche Ausdrücke, wenn $A = 0$ ist, in folgende übergehen

$$na \int \sin u \,.\, dt = - a \cos u + \tfrac{1}{4}\, ea \cos 2u$$
$$na \int \cos u \,.\, dt = -\tfrac{1}{2}\, eau + a \sin u - \tfrac{1}{4}\, ea \sin 2u$$
$$= -\tfrac{1}{2}\, eant + a (1 - \tfrac{1}{2} e^2) \sin u - \tfrac{1}{4}\, ea \sin 2u$$

Die Integrale für den dritten Fall, $i = -1$, bekommt man aus denen des zweiten Falles, wenn man darin $-A$ für A schreibt.

39.

Zur Erfindung des Integrals der ersten im Art. 37. angeführten Form übergehend, bemerke ich, dafs der Fall, wo $i' = 0$ ist, gar keine Schwierigkeit darbietet, denn wir haben durch die bekannten Regeln für denselben sogleich

$$a \int \sin (iu + A)\, du = -\frac{a}{i} \cos (iu + A)$$
$$a \int \cos (iu + A)\, du = \frac{a}{i} \sin (iu + A)$$

mit der Ausnahme, dafs für $i = 0$

$$a \int \sin A\, du = au \sin A$$
$$= ant \sin A + \tfrac{1}{2}\, ea \cos (-u + A) - \tfrac{1}{2}\, ea \cos (u + A)$$
$$a \int \cos A\, du = au \cos A$$
$$= ant \cos A - \tfrac{1}{2}\, ea \sin (-u + A) + \tfrac{1}{2}\, ea \sin (u + A)$$

erhalten wird.

40.

Es ist also noch das Integral der vollständigen Form

$$a \left\{ {\sin \atop \cos} \right\} (iu + i'g' + A)\, du$$

zu ermitteln übrig, welches bis jetzt nirgends gegeben worden ist, da diese

Form noch nicht vorgekommen ist. Man erkennt leicht, daſs das Integral keine andere Form haben kann, wie die folgende

$$\left.\begin{aligned} & a\int \cos(iu+i'g'+A)\,du \\ & = a\alpha^i_i \sin(iu+i'g'+A) + a\alpha^i_{i+1}\sin[(i+1)u+i'g'+A] + a\alpha^i_{i+2}\sin[(i+2)u+i'g'+A] + \text{etc.} \\ & \qquad + a\alpha^i_{i-1}\sin[(i-1)u+i'g'+A] + a\alpha^i_{i-2}\sin[(i-2)u+i'g'+A] + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \text{(X)}$$

wo die mit α bezeichneten Gröſsen constante Factoren sind. Differentiiren wir diesen Ausdruck, indem wir auf die Gleichungen

$$g' = n't + c'; \quad v = \frac{n'}{n}; \quad dt = \frac{1}{n}(1 - e\cos u)\,du$$

Rücksicht nehmen, so erhalten wir folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \cos(iu+i'g'+A) = \; & \{\alpha^i_i(i+i'v) - \lambda\alpha^i_{i+1} - \lambda\alpha^i_{i-1}\}\cos(iu+i'g'+A) \\ & - \{\lambda\alpha^i_i - (i+1+i'v)\alpha^i_{i+1} + \lambda\alpha^i_{i+2}\}\cos[(i+1)u+i'g'+A] \\ & - \{\lambda\alpha^i_{i+1} - (i+2+i'v)\alpha^i_{i+2} + \lambda\alpha^i_{i+3}\}\cos[(i+2)u+i'g'+A] \\ & - \text{etc.} \\ & - \{\lambda\alpha^i_i - (i-1+i'v)\alpha^i_{i-1} + \lambda\alpha^i_{i-2}\}\cos[(i-1)u+i'g'+A] \\ & - \{\lambda\alpha^i_{i-1} - (i-2+i'v)\alpha^i_{i-2} + \lambda\alpha^i_{i-3}\}\cos[(i-2)u+i'g'+A] \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\lambda = \tfrac{1}{2}ei'v$$

gesetzt worden ist. Da die vorstehende Gleichung identisch seyn muſs, so giebt sie

$$\left.\begin{aligned} 1 &= (i+i'v)\alpha^i_i - \lambda\alpha^i_{i+1} - \lambda\alpha^i_{i-1} \\ 0 &= \lambda\alpha^i_i \; - (i+1+i'v)\alpha^i_{i+1} + \lambda\alpha^i_{i+2}; \quad 0 = \lambda\alpha^i_i \; - (i-1+i'v)\alpha^i_{i-1} + \lambda\alpha^i_{i-2} \\ 0 &= \lambda\alpha^i_{i+1} - (i+2+i'v)\alpha^i_{i+2} + \lambda\alpha^i_{i+3}; \quad 0 = \lambda\alpha^i_{i-1} - (i-2+i'v)\alpha^i_{i-2} + \lambda\alpha^i_{i-3} \\ 0 &= \lambda\alpha^i_{i+2} - (i+3+i'v)\alpha^i_{i+3} + \lambda\alpha^i_{i+4}; \quad 0 = \lambda\alpha^i_{i-2} - (i-3+i'v)\alpha^i_{i-3} + \lambda\alpha^i_{i-4} \\ & \qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

41.

Die eben gefundenen Gleichungen lassen sich auf stark convergirende Kettenbrüche hinführen, und dadurch auf bequem anzuwendende Weise auflösen. Die Gleichungen linker Hand, von der zweiten angerechnet, geben nemlich vermittelst einer leichten Umstellung

$$
(B) \ldots\ldots \left\{
\begin{aligned}
\frac{\alpha^i_{i+1}}{\alpha^i_i} &= \cfrac{1}{\cfrac{i+1+i'v}{\lambda} - \cfrac{\alpha^i_{i+2}}{\alpha^i_{i+1}}} \\
\frac{\alpha^i_{i+2}}{\alpha^i_{i+1}} &= \cfrac{1}{\cfrac{i+2+i'v}{\lambda} - \cfrac{\alpha^i_{i+3}}{\alpha^i_{i+2}}} \\
\frac{\alpha^i_{i+3}}{\alpha^i_{i+2}} &= \cfrac{1}{\cfrac{i+3+i'v}{\lambda} - \cfrac{\alpha^i_{i+4}}{\alpha^i_{i+3}}} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

Hiemit ergiebt sich

$$
\frac{\alpha^i_{i+1}}{\alpha^i_i} = \cfrac{1}{\cfrac{i+1+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+2+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+3+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+4+i'v}{\lambda} - \text{etc.}}}}}
$$

und eben so giebt das in den Gleichungen (A) des vorigen Artikels rechter Hand befindliche System

$$
\frac{\alpha^i_{i-1}}{\alpha^i_i} = \cfrac{1}{\cfrac{i-1+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-2+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-3+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-4+i'v}{\lambda} - \text{etc.}}}}}
$$

Es läfst sich leicht zeigen, dafs diese Kettenbrüche immer convergiren. Wenn man den ersten derselben bis zum Gliede, welches $i+k+i'v$ enthält, fortsetzt, so sind die beiden letzten Glieder desselben strenge die folgenden

$$
\cfrac{1}{\cfrac{i+k-1+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+k+i'v}{\lambda} - \cfrac{\alpha^i_{i+k+1}}{\alpha^i_{i+k}}}}
$$

Man kann k immer so wählen, dafs das letzte dieser Glieder unmerklich wird,

wodurch das Aggregat aller folgenden Glieder nothwendig auch unmerklich werden muſs. Denn die Gröſsen

$$i+i''v,\ i+1+i''v,\ \text{etc.}\ i+k+i''v,\ \text{etc.}$$

werden nothwendig, wenn man sie hinreichend fortsetzt, positiv und fangen von da an bis in's Unendliche zu wachsen. Man kann also k immer so annehmen, daſs $\frac{i+k+i''v}{\lambda}$ eine sehr groſse Zahl, und demzufolge

$$\frac{1}{\frac{i+k+i''v}{\lambda}}$$

unmerklich ist. Ist nun zugleich $\frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}}$ ein kleiner Bruch, so ist

$$\frac{1}{\frac{i+k+i''v}{\lambda}-\frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}}}$$

ebenfalls unmerklich, und der Kettenbruch bricht für die Anwendung bei diesem Gliede ab. Daſs in der That diese Annahme rücksichtlich des Verhältnisses $\frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}}$ den ursprünglichen Gleichungen gnügt, wenn $\frac{i+k+i''v}{\lambda}$ eine groſse Zahl ist, läſst sich leicht zeigen. Stellen wir die Gleichungen des vorigen Artikels, aus welchen unser Kettenbruch abgeleitet wurde, von der k^{ten} an, wie folgt

$$\frac{i+k+i''v}{\lambda}=\beta_k+\frac{1}{\beta_{k-1}}$$

$$\frac{i+k+1+i''v}{\lambda}=\beta_{k+1}+\frac{1}{\beta_k}$$

$$\frac{i+k+2+i''v}{\lambda}=\beta_{k+2}+\frac{1}{\beta_{k+1}}$$

etc.

wo allgemein β_k für $\frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}}$ geschrieben worden ist, so erkennt man sogleich, daſs ihnen, wenn $\frac{i+k+i''v}{\lambda}$ eine groſse Zahl ist, durch die Annahme, daſs

β_{k-1}, β_k, β_{k+1} etc. kleine Brüche seyen, Genüge geleistet wird. Wir können daher bei der Anwendung des obigen ersten Kettenbruches, wenn wir k hinreichend grofs annehmen, bei der Berechnung desselben $\beta_k = 0$ annehmen.

Derselbe Fall findet bei dem andern Kettenbruche statt, da die Gröfsen

$$i-1+i'\nu,\; i-2+i'\nu, \text{ etc.}, \; i-k'+i'\nu, \text{ etc.}$$

von dem kleinsten derselben angerechnet, mit negativen Vorzeichen immer wachsen, und bis in's Unendliche zunehmen.

42.

Schreiben wir in dem zuerst angeführten Kettenbruche des vorhergehenden Artikels $i+k$ statt i, dann verwandelt er sich

$$\frac{\alpha^{i+k}_{i+k+1}}{\alpha^{i+k}_{i+k}} = \cfrac{1}{\cfrac{i+k+1+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+k+2+i'\nu}{\lambda} - \text{etc.}}}$$

Verwandeln wir aber die Gleichungen (B) des vorhergehenden Artikels, indem wir die k ersten derselben weglassen, in einen Kettenbruch, so ergiebt sich

$$\frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}} = \cfrac{1}{\cfrac{i+k+1+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+k+2+i'\nu}{\lambda} - \text{etc.}}}$$

Hieraus folgt, dafs

$$\frac{\alpha^{i+k}_{i+k+1}}{\alpha^{i+k}_{i+k}} = \frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}}$$

und auf dieselbe Art läfst sich zeigen, dafs

$$\frac{\alpha^{i-k}_{i-k-1}}{\alpha^{i-k}_{i-k}} = \frac{\alpha^{i}_{i-k-1}}{\alpha^{i}_{i-k}}$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs das Verhältnifs von je zwei auf einander folgenden Integrationsfactoren von dem Werthe des oberen Index unabhängig ist. Die Kettenbrüche, aus welchen diese Gleichungen entstanden sind, zeigen aber, dafs der Werth dieses Verhältnisses anders ist, wenn der untere Index wächst, als wenn er abnimmt. Sey nun

$$p_i = \cfrac{1}{\cfrac{i+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+1+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+2+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+3+i'v}{\lambda} - \text{etc.}}}}}$$

$$q_i = \cfrac{1}{\cfrac{i+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-1+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-2+i'v}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-3+i'v}{\lambda} - \text{etc.}}}}} \qquad \text{.......... (A)}$$

dann erhalten wir, wenn p_i und q_i für alle Werthe des Index i berechnet worden sind

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{i+k}^{i} &= \alpha_i^i \cdot p_{i+1} \cdot p_{i+2} \cdot \cdot \cdot p_{i+k} \\ \alpha_{i-k}^{i} &= \alpha_i^i \cdot q_{i-1} \cdot q_{i-2} \cdot \cdot \cdot q_{i-k} \end{aligned}\right\} \text{.......... (B)}$$

Wenn also p_i, q_i und α_i^i gegeben sind, dann ergeben sich alle übrigen Integrationsfactoren durch Hülfe der vorstehenden Gleichungen. Die Integrationsfactoren, die oben und unten denselben Index haben, ergeben sich aber, nachdem aus den vorstehenden Gleichungen (A) p_i und q_i berechnet worden sind, durch folgende Gleichung

$$\alpha_i^i = \frac{1}{i + i'v - \lambda\,[p_{i+1} + q_{i-1}]} \quad \text{.......... (C)}$$

welche nichts weiter wie eine Umstellung der ersten Gleichung (A) des Art. 40. ist.

Durch das Vorstehende ist zugleich die Integration der Gröſse

$$a \sin\,(iu + i'g' + A)\, du$$

gegeben. Denn wenn man im Integral (X) des Art. 40. rechter Hand die Sinusse in Cosinusse verwandelt, und die algebraischen Zeichen umwechselt, so kommt man auf dieselben, im Vorhergehenden entwickelten Integrationsfactoren.

43.

Das im Vorhergehenden beschriebene Verfahren zur Berechnung der Integrationsfactoren ist besonders in den Fällen, wo λ klein ist, zur Anwendung zweckmäſsig, denn in diesen Fällen convergiren die Kettenbrüche (A), schon von den ersten Gliedern derselben angerechnet, ungemein stark. Wenn aber λ eine groſse Zahl ist, wird die Anwendung dieser Kettenbrüche mühsamer, weil alsdann die Convergenz erst für beträchtlich groſse Werthe von $i+k$ eintritt, und man daher, um hinreichend genaue Werthe von p_i und q_i zu erhalten, eine sehr groſse Anzahl von Gliedern berechnen muſs. Allein es ist zur Berechnung dieser Integrationsfactoren noch ein anderes Verfahren möglich, welches eben in den Fällen, wo λ eine groſse Zahl ist, bessere Dienste leistet; dieses werde ich jetzt auseinandersetzen.

Seyen y und x zwei Gröſsen, die auf folgende Art von einander abhängen

$$y = \Sigma_{-\infty}^{+\infty}\, \alpha_{i+n}\, x^n$$

Wenn wir diese Gleichung successive mit a, $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{x^2}$, etc. multipliciren und die Producte addiren, dann bekommen wir

$$y\left\{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\text{etc.}\right\} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty}\left\{a\alpha_{i+n}+b\alpha_{i+n+1}+c\alpha_{i+n+2}+\text{etc.}\right\}x^n$$

Das Differential der aufgestellten Gleichung ist

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty}\, n\alpha_{i+n}\, x^{n-1}$$

Wenn wir dieses einer ähnlichen Behandlung unterwerfen, ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx}\left\{a'x+b'+\frac{c'}{x}+\text{etc.}\right\} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty}\left\{a'n\alpha_{i+n}+b'(n+1)\alpha_{i+n+1}+c'(n+2)\alpha_{i+n+2}+\text{etc.}\right\}x^n$$

Aehnliche Gleichungen lassen sich auch für die höheren Differentiale, so wie für Combinationen anderer Gattung ableiten, ich bleibe aber hiebei stehen, weil die vorstehenden für den hier zu erreichenden Zweck ausreichen.

44.

Gehen wir zu den Gleichungen (A) des Art. 40. zurück, und stellen sie durch Eine allgemeine Gleichung dar, dann erhalten wir

$$(i+n+1+i'v)\,\alpha^i_{i+n+1} - \lambda\alpha^i_{i+n} - \lambda\alpha^i_{i+n+2} = 0$$

ausgenommen $= 1$, wenn $n = -1$

Vergleichen wir diese Gleichung mit den beiden im vorhergehenden Artikel abgeleiteten, so ergiebt sich, wenn wir den dort α_{i+n}, etc. genannten Coefficienten die Bedeutung beilegen, die resp. α^{i}_{i+n}, etc. haben, dafs

$$\frac{dy}{dx}+y\left\{\frac{i+i'v}{x}-\lambda-\frac{\lambda}{x^2}\right\}=\frac{1}{x}$$

Aus der Art der Entstehung dieser linearischen Differentialgleichung erster Ordnung folgt, dafs, wenn wir sie integriren, und das Integral in eine unendliche, nach den ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, für jeden Werth des Exponenten n, der Coefficient von x^n dem Integrationsfactor α^{i}_{i+n} gleich ist, und diese folglich durch die Integration dieser Gleichung gefunden werden.

45.

Man kann durch Hülfe der eben entwickelten linearischen Differentialgleichung die Integrationsfactoren auf verschiedene Weise ausdrücken. Setzen wir

$$x+\frac{1}{x}=2\cos z$$

dann erhalten wir bekanntlich unter andern

$$x-\frac{1}{x}=2\varrho\sin z$$

$$dx=\varrho x dz$$

wo ϱ für $\sqrt{-1}$ geschrieben ist. Durch Substitution dieser Ausdrücke geht die im vorhergehenden Artikel gefundene Differentialgleichung in folgende über

$$\frac{dy}{dz}+y\varrho(\omega-2\lambda\cos z)=\varrho$$

wo ich zur Abkürzung ω für $i+i'v$ geschrieben habe. Das Integral dieser Gleichung ist

$$y=c^{-\varrho(\omega z-2\lambda\sin z)}\int c^{\varrho(\omega z-2\lambda\sin z)}\varrho dz+\text{const.}$$

wo c die Grundzahl der hyperbolischen Logarithmen bedeutet. Durch theilweise Integration ergiebt sich aber allgemein

$$\int c^{\varrho[(\omega+k)z-2\lambda\sin z]}\varrho dz=\frac{1}{\omega+k}c^{\varrho[(\omega+k)z-2\lambda\sin z]}+\frac{\lambda}{\omega+k}\int c^{\varrho[(\omega+k+1)z-2\lambda\sin z]}\varrho dz$$
$$+\frac{\lambda}{\omega+k}\int c^{\varrho[(\omega+k-1)z-2\lambda\sin z]}\varrho dz$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\int c^{\varrho[(\varpi+k)z-2\lambda\sin z]}\varrho dz = \varphi(\varpi+k)$$
$$c^{\varrho[(\varpi+k)z-2\lambda\sin z]} = F(\varpi+k)$$

so ergeben sich aus der vorstehenden Gleichung, wenn wir für k nach und nach alle ganzen Zahlen setzen, die folgenden Gleichungen

$$(A)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}
\varphi(\varpi) = \frac{1}{\varpi}F(\varpi) + \frac{\lambda}{\varpi}\varphi(\varpi+1) + \frac{\lambda}{\varpi}\varphi(\varpi-1) \\
\varphi(\varpi+1) = \frac{1}{\varpi+1}F(\varpi+1) + \frac{\lambda}{\varpi+1}\varphi(\varpi+2) + \frac{\lambda}{\varpi+1}\varphi(\varpi) \\
\varphi(\varpi+2) = \frac{1}{\varpi+2}F(\varpi+2) + \frac{\lambda}{\varpi+2}\varphi(\varpi+3) + \frac{\lambda}{\varpi+2}\varphi(\varpi+1) \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
\varphi(\varpi-1) = \frac{1}{\varpi-1}F(\varpi-1) + \frac{\lambda}{\varpi-1}\varphi(\varpi) + \frac{\lambda}{\varpi-1}\varphi(\varpi-2) \\
\varphi(\varpi-2) = \frac{1}{\varpi-2}F(\varpi-2) + \frac{\lambda}{\varpi-2}\varphi(\varpi-1) + \frac{\lambda}{\varpi-2}\varphi(\varpi-3) \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}\right.$$

Diese Gleichungen geben durch successive Substitutionen

$$\begin{aligned}
\varphi(\varpi) = {} & \frac{1}{\varpi}F(\varpi) + \frac{\lambda}{\varpi.\varpi+1}F(\varpi+1) + \frac{\lambda}{\varpi-1.\varpi}F(\varpi-1) \\
& + \frac{\lambda^2}{\varpi.\varpi+1}\varphi(\varpi+2) + \frac{2\lambda^2}{\varpi-1.\varpi+1}\varphi(\varpi) + \frac{\lambda^2}{\varpi-1.\varpi}\varphi(\varpi-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\varpi) = {} & \frac{1}{\varpi}F(\varpi) + \frac{\lambda}{\varpi.\varpi+1}F(\varpi+1) + \frac{\lambda}{\varpi-1.\varpi}F(\varpi-1) \\
& + \frac{\lambda^2}{\varpi.\varpi+1.\varpi+2}F(\varpi+2) + \frac{2\lambda^2}{\varpi-1.\varpi.\varpi+1}F(\varpi) + \frac{\lambda^2}{\varpi-2.\varpi-1.\varpi}F(\varpi-2) \\
& + \frac{\lambda^3}{\varpi.\varpi+1.\varpi+2}\varphi(\varpi+3) + \frac{3\lambda^3}{\varpi-1.\varpi.\varpi+2}\varphi(\varpi+1) + \frac{3\lambda^3}{\varpi-2.\varpi.\varpi+1}\varphi(\varpi-1) \\
& + \frac{\lambda^3}{\varpi-2.\varpi-1.\varpi}\varphi(\varpi-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\varpi) = {} & \frac{1}{\varpi}F(\varpi) + \frac{\lambda}{\varpi.\varpi+1}F(\varpi+1) + \frac{\lambda}{\varpi-1.\varpi}F(\varpi-1) \\
& + \frac{\lambda^2}{\varpi.\varpi+1.\varpi+2}F(\varpi+2) + \frac{2\lambda^2}{\varpi-1.\varpi.\varpi+1}F(\varpi) + \frac{\lambda^2}{\varpi-2.\varpi-1.\varpi}F(\varpi-2) \\
& + \frac{\lambda^3}{\varpi.\varpi+1.\varpi+2.\varpi+3}F(\varpi+3) + \frac{3\lambda^3}{\varpi-1.\varpi.\varpi+1.\varpi+2}F(\varpi+1) \\
& + \frac{3\lambda^3}{\varpi-2.\varpi-1.\varpi.\varpi+1}F(\varpi-1) + \frac{\lambda^3}{\varpi-3.\varpi-2.\varpi-1.\varpi}F(\varpi-3) \\
& + \frac{\lambda^4}{\varpi.\varpi+1.\varpi+2.\varpi+3}\varphi(\varpi+4) + \frac{4\lambda^4}{\varpi-1.\varpi.\varpi+1.\varpi+3}\varphi(\varpi+2) + \frac{6\lambda^4}{\varpi-2.\varpi-1.\varpi+1.\varpi+2}\varphi(\varpi) \\
& + \frac{4\lambda^4}{\varpi-3.\varpi-1.\varpi.\varpi+1}\varphi(\varpi-2) + \frac{\lambda^4}{\varpi-3.\varpi-2.\varpi-1.\varpi}\varphi(\varpi-4)
\end{aligned}$$

u. s. w., wo das Gesetz des Fortganges offenbar ist. Vergleichen wir nun die Bedeutung der eben eingeführten Zeichen $\varphi(\omega)$ und $F(\omega)$ mit dem obigen Werthe von y, so ergiebt sich, daſs der Coefficient von $F(\omega+k)$ in dem Ausdrucke für $\varphi(\omega)$ dem Integrationsfactor $\alpha^{i'}_{i+k}$ gleich ist. Der eben gefundene Ausdruck für $\varphi(\omega)$ giebt daher, wenn wir für die darin vorkommenden Binominalcoefficienten ihre allgemeinen Ausdrücke setzen

$$\alpha^{i'}_{i} = \frac{1}{\omega} + \frac{\frac{2}{1}\lambda^2}{\omega-1.\omega.\omega+1} + \frac{\frac{4.3}{1.2}\lambda^4}{\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2} + \frac{\frac{6.5.4}{1.2.3}\lambda^6}{\omega-3.\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3} + \text{etc.}$$

$$\alpha^{i'}_{i+1} = \frac{\lambda}{\omega.\omega+1} + \frac{\frac{3}{1}\lambda^3}{\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2} + \frac{\frac{5.4}{1.2}\lambda^5}{\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3} + \text{etc.}$$

$$\alpha^{i'}_{i+2} = \frac{\lambda^2}{\omega.\omega+1.\omega+2} + \frac{\frac{4}{1}\lambda^4}{\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3} + \frac{\frac{6.5}{1.2}\lambda^6}{\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3.\omega+4} + \text{etc.}$$

etc. etc.

$$\alpha^{i'}_{i-1} = \frac{\lambda}{\omega-1.\omega} + \frac{\frac{3}{1}\lambda^3}{\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1} + \frac{\frac{5.4}{1.2}\lambda^5}{\omega-3.\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2} + \text{etc.}$$

$$\alpha^{i'}_{i-2} = \frac{\lambda^2}{\omega-2.\omega-1.\omega} + \frac{\frac{4}{1}\lambda^4}{\omega-3.\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1} + \frac{\frac{6.5}{1.2}\lambda^6}{\omega-4.\omega-3.\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Diese Reihen folgen, wie man sieht, einem sehr einfachen Gesetz, und convergiren für jeden Werth von λ, aber wenn λ sehr groſs ist, muſs man sehr viele Glieder derselben berechnen. Sie sind daher in diesem Falle nicht zur Anwendung geeignet, aber sie geben unmittelbar eine wichtige Eigenschaft der Integrationsfactoren zu erkennen, und dieser Umstand sowohl wie die regelmäſsige Form, die sie haben, hat mich veranlaſst, ihre Entwickelung hier zu geben. Man erkennt unmittelbar aus den vorstehenden Ausdrücken, daſs, wenn die mittleren Bewegungen des Kometen und Planeten commensurabel sind, d. h. wenn für gewisse Werthe von i und i' die Gröſse

$$i + i'\nu = \omega = 0$$

wird, alle diesen Werthen von i und i' zukommenden Integrationsfactoren unendlich groſs werden. Es wird dadurch angezeigt, daſs in diesem Falle die Integration anders ausgeführt werden muſs, die Aenderung, die das Integrationsverfahren erleiden muſs, ergiebt sich leicht aus den Gleichungen,

von welchen wir ausgegangen sind, ich werde aber die Auseinandersetzung desselben bis auf eine andere Gelegenheit verschieben.

Die vorstehenden Ausdrücke der Integrationsfactoren geben ferner zu erkennen, dafs, wenn die mittleren Bewegungen des Kometen und Planeten *nicht* commensurabel sind, *kein* Integrationsfactor unendlich grofs werden kann. Dieses ist für die Aufgabe, die uns hier beschäftigt, ein wichtiger Satz, weil durch denselben die Möglichkeit der hier gegebenen Auflösung begründet wird.

46.

Integriren wir die Differentialgleichung des Art. 44., ohne für x eine andere Gröfse einzuführen, so bekommen wir

(A) .... $$y = x^{-\varpi} c^{\lambda(x-\frac{1}{x})} \int x^{\varpi-1} c^{-\lambda(x-\frac{1}{x})} dx + \text{const.}$$

wo, wie vorher, ϖ für $i+i'v$ geschrieben ist. Die beiden Reihen

$$c^{\lambda x} = 1+\lambda x+\frac{1}{2}\lambda^2x^2+\frac{1}{2.3}\lambda^3x^3+\frac{1}{2.3.4}\lambda^4x^4+\text{etc.}$$

$$c^{-\frac{\lambda}{x}} = 1-\frac{\lambda}{x}+\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{x^2}-\frac{1}{2.3}\frac{\lambda^3}{x^3}+\frac{1}{2.3.4}\frac{\lambda^4}{x^4}\mp\text{etc.}$$

geben ohne Mühe

(B) .... $$\begin{aligned} c^{\lambda(x-\frac{1}{x})} &= I_\lambda^0+I_\lambda^1 x+I_\lambda^2 x^2+I_\lambda^3 x^3+\text{etc.} \\ &\quad -I_\lambda^1\frac{1}{x}+I_\lambda^2\frac{1}{x^2}-I_\lambda^3\frac{1}{x^3}\pm\text{etc.} \\ c^{-\lambda(x-\frac{1}{x})} &= I_\lambda^0-I_\lambda^1 x+I_\lambda^2 x^2-I_\lambda^3 x^3+\text{etc.} \\ &\quad +I_\lambda^1\frac{1}{x}+I_\lambda^2\frac{1}{x^2}+I_\lambda^3\frac{1}{x^3}+\text{etc.} \end{aligned}$$

wo *)

(C) .... $$\begin{aligned} I_\lambda^0 &= 1-\lambda^2+\frac{1}{2^2}\lambda^4-\frac{1}{2^2.3^2}\lambda^6\pm\text{etc.} \\ I_\lambda^1 &= \lambda-\frac{1}{2}\lambda^3+\frac{1}{2^2.3}\lambda^5-\frac{1}{2^2.3^2.4}\lambda^7\pm\text{etc.} \\ I_\lambda^2 &= \frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2.3}\lambda^4+\frac{1}{2^2.3.4}\lambda^6-\frac{1}{2^2.3^2.4.5}\lambda^8\pm\text{etc.} \\ I_\lambda^3 &= \frac{1}{2.3}\lambda^3-\frac{1}{2.3.4}\lambda^5+\frac{1}{2^2.3.4.5}\lambda^7-\frac{1}{2^2.3^2.4.5.6}\lambda^9\pm\text{etc.} \\ &\quad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

*) Zu bemerken ist, dafs die dem Buchstaben I oben rechts angehängten Zahlen keine Exponenten, sondern Indices sind.

Substituirt man nun die Reihen (B) in (A) und führt die angezeigte Integration aus, so bekommt man

$$y = \left\{ \text{etc.} + I_\lambda^4 x^{-4} - I_\lambda^3 x^{-3} + I_\lambda^2 x^{-2} - I_\lambda^1 x^{-1} + I_\lambda^0 + I_\lambda^1 x + I_\lambda^2 x^2 + I_\lambda^3 x^3 + I_\lambda^4 x^4 + \text{etc.} \right\}$$
$$\times \left\{ \text{etc.} + \frac{I_\lambda^4}{\omega+4} x^4 - \frac{I_\lambda^3}{\omega+3} x^3 + \frac{I_\lambda^2}{\omega+2} x^2 - \frac{I_\lambda^1}{\omega+1} x + \frac{I_\lambda^0}{\omega} + \frac{I_\lambda^1}{\omega-1} x^{-1} + \frac{I_\lambda^2}{\omega-2} x^{-2} + \frac{I_\lambda^3}{\omega-3} x^{-3} + \frac{I_\lambda^4}{\omega-4} x^{-4} + \text{etc.} \right\}$$
$$+ \text{const.}$$

Dafs die Coefficienten der beiden unendlichen Reihen, aus deren Product dieser Ausdruck für y besteht, immer convergiren, läfst sich, wie folgt, beweisen. Wenn wir die beiden Reihen (B) mit einander multipliciren, wird die linke Seite des Products $= 1$, und die rechte Seite giebt daher unter andern folgende Gleichung

$$1 = (I_\lambda^0)^2 + 2(I_\lambda^1)^2 + 2(I_\lambda^2)^2 + 2(I_\lambda^3)^2 + \text{etc.}$$

Diese Gleichung zeigt erstlich an, dafs, wie grofs auch λ sey, die Transcendente I_λ^0 nie gröfser wie 1, und die übrigen Transcendenten nie gröfser wie $\frac{1}{\sqrt{2}}$ werden können. Sie zeigt ferner, dafs die Transcendenten I_λ^0, I_λ^1, I_λ^2, etc. eine convergirende Reihe bilden müssen, denn wenn die Summe einer unendlich grofsen Anzahl von positiven Gröfsen einer endlichen Gröfse gleich ist (hier $= 1$), so müssen die Gröfsen nothwendig nach und nach kleiner werden und zum Werthe Null hinstreben, d. h. eine convergirende Reihe bilden, wenn sie nicht etwa alle unendlich klein wären. Dafs aber die ersten dieser Transcendenten nicht unendlich klein sind, so lange λ nicht unendlich grofs wird, zeigen die Reihen (C) ohne Weiteres, woraus also folgt, dafs sie unter einander eine convergirende Reihe bilden, so lange λ nicht unendlich grofs ist *). Zu bemerken ist, dafs die Convergenz grade nicht bei den ersten dieser Transcendenten anzufangen braucht, sondern sich ereignen kann, dafs eine gewisse Anzahl der ersten durch einander gröfser und kleiner ist, und nach diesen die Convergenz erst eintritt. Hiemit ist also die Convergenz der Coefficienten der beiden Reihen, aus welchen y besteht, bewiesen; die zweite derselben convergirt noch aus mehrerem Grunde, weil

*) Wenn λ unendlich grofs ist, sind in der That alle diese Transcendenten unendlich klein. Aber in diesem Falle, der übrigens nie vorkommen kann, würden alle Integrationsfactoren gleich Null werden.

die Divisoren ω, $\omega+1$, etc. zu beiden Seiten hin, vom kleinsten derselben angerechnet, wachsen.

Aus dem vorstehenden Ausdruck für y kann man die analytischen Ausdrücke aller Integrationsfactoren ohne Mühe berechnen. Man kann denselben auch dazu anwenden, um in jedem speciellen Falle sogleich die numerischen Werthe der Integrationsfactoren zu berechnen. Nachdem die numerischen Werthe des Transcendenten I^0_λ, I^1_λ, etc. berechnet, und die Divisionen mit ω, $\omega+1$, etc. ausgeführt worden sind, schreibt man die Logarithmen der Coefficienten des einen Factors zuoberst auf das Papier, und die des andern Factors zuunterst auf ein anderes Stück Papier, beide in der Ordnung, in welcher sie hier in der Formel angesetzt worden sind. Wenn man nun das eine Stück Papier über das andere hält, so stehen alle Mal die Logarithmen über einander, deren Summe die Logarithmen der Glieder eines und desselben Integrationsfactors sind. Durch Verschiebung des einen Stück Papiers über dem andern, und Addition der dadurch unter einander zu stehen kommenden Logarithmen bekommt man also nach und nach die Glieder aller Integrationsfactoren.

Außerdem kann man den obigen Ausdruck von y auf noch andere Art anwenden; wenn man nemlich durch denselben für jeden Werth, den λ annimmt, nur zwei Integrationsfactoren berechnet, dann kann man alle übrigen durch die endlichen Ausdrücke der Artt. 40. und 41. berechnen. Der obige Ausdruck für y giebt ohne Mühe

$$\alpha^i_{i+1} = \frac{I^0_\lambda I^1_\lambda}{\omega(\omega+1)} + \frac{3I^1_\lambda I^2_\lambda}{(\omega-1)(\omega+2)} + \frac{5I^2_\lambda I^3_\lambda}{(\omega-2)(\omega+3)} + \frac{7I^3_\lambda I^4_\lambda}{(\omega-3)(\omega+4)} + \text{etc.}$$

$$\alpha^i_{i-1} = \frac{I^0_\lambda I^1_\lambda}{(\omega-1)\omega} + \frac{3I^1_\lambda I^2_\lambda}{(\omega-2)(\omega+1)} + \frac{5I^2_\lambda I^3_\lambda}{(\omega-3)(\omega+2)} + \frac{7I^3_\lambda I^4_\lambda}{(\omega-4)(\omega+3)} + \text{etc.}$$

Berechnet man für irgend einen bestimmten Werth von i, den ich ι nennen will, durch diese Ausdrücke $\alpha^\iota_{\iota+1}$ und $\alpha^\iota_{\iota-1}$, indem man nemlich $\iota+i'v$ für ω substituirt, so kann man vermittelst der ersten der Gleichungen (A) des Art. 40. α^ι_ι berechnen. Nemlich

$$\alpha^\iota_\iota = \frac{1}{\omega} + \frac{\lambda}{\omega}\left\{\alpha^\iota_{\iota+1} + \alpha^\iota_{\iota-1}\right\}$$

wo sich von selbst versteht, daſs auch unter ω die Gröſse $\iota+i'v$ verstanden werden muſs. Ist diese Rechnung ausgeführt, so bekommt man

$$p_{\iota+1} = \frac{\alpha^{\iota}_{\iota+1}}{\alpha^{\iota}_{\iota}}; \quad q_{\iota-1} = \frac{\alpha^{\iota}_{\iota-1}}{\alpha^{\iota}_{\iota}}$$

Die Gleichungen (B) des Art. 41. geben nun

$$p_{\iota} = \frac{1}{\frac{\omega}{\lambda} - p_{\iota+1}}$$

$$p_{\iota-1} = \frac{1}{\frac{\omega-1}{\lambda} - p_{\iota}}$$

etc.

$$p_{\iota+2} = \frac{\omega+1}{\lambda} - \frac{1}{p_{\iota+1}}$$

$$p_{\iota+3} = \frac{\omega+2}{\lambda} - \frac{1}{p_{\iota+2}}$$

etc.

und ebenso

$$q_{\iota} = \frac{1}{\frac{\omega}{\lambda} - q_{\iota-1}}$$

$$q_{\iota+1} = \frac{1}{\frac{\omega+1}{\lambda} - q_{\iota}}$$

etc.

$$q_{\iota-2} = \frac{\omega-1}{\lambda} - \frac{1}{q_{\iota-1}}$$

$$q_{\iota-3} = \frac{\omega-2}{\lambda} - \frac{1}{q_{\iota-2}}$$

etc.

das ist allgemein p_i und q_i *). Sind diese hieraus berechnet worden, dann giebt die Gleichung

$$\alpha^{\iota}_{i} = \frac{1}{i - i'v - \lambda \{p_{i+1} + q_{i-1}\}}$$

die übrigen Integrationsfactoren.

---

*) Durch Anwendung der bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche kann man auch Formeln construiren, die ohne Dazwischenkunft der übrigen analogen Gröfsen sogleich p_i für beliebigen Werth von i aus p_{ι}, und ebenso q_i aus q_{ι} geben.

47.

Die im Vorhergehenden erklärten Rechnungen sind leicht auszuführen, wenn die Transcendenten I_{λ}^{0}, I_{λ}^{1}, etc. gegeben sind. Wenn λ klein ist, kann man sie leicht aus den Reihen (C) des vorhergehenden Artikels berechnen, aber wenn λ eine große Zahl ist, hört dieses Verfahren auf, ausführbar zu seyn, weil diese Reihen alsdann in den ersten Gliedern stark divergiren. In jedem Falle wird aber die Berechnung dieser Transcendenten sehr bequem, wenn man im Voraus eine Tafel construirt, welche sie für eine Reihe von Werthen von λ enthält, aus welcher man durch Interpolation sie in jedem speciellen Falle entlehnen kann. Die unten beigefügte Tafel I. enthält die beiden Transcendenten I_{λ}^{0} und I_{λ}^{1} von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 10$, und man kann bis zu dieser Grenze also in jedem speciellen Falle sie durch bloße Interpolation daraus entlehnen. Diese beiden reichen hin, um alle übrigen demselben Werthe von λ zugehörigen Transcendenten auf einfache Art zu berechnen. Sie sind nemlich mit denen, welche Bessel I_{k}^{i} genannt hat *), identisch, wenn man 2λ für k schreibt. Um dies zu zeigen, setze ich wie oben

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos z$$

Hieraus folgt bekanntlich

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \cos 2z$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2 \cos 3z$$

etc.

$$x - \frac{1}{x} = 2\varrho \sin z$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = 2\varrho \sin 2z$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = 2\varrho \sin 3z$$

etc.

---

*) S. Bessel's „Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht" in den „Abhandlungen der Königl. A. d. W. zu Berlin. Aus dem Jahre 1824."

Dieselben Transcendenten kommen auch in der Wärmelehre vor. S. *Fourier*, *Théorie de la chaleur. Cap. VI.*

wo $\varrho = \sqrt{-1}$ ist. Substituiren wir diese Gleichungen in die erste Reihe (B) des Art. 46., dann ergiebt sich

$$c^{2\lambda\varrho \sin z} = I_\lambda^0 + 2\varrho I_\lambda^1 \sin z + 2 I_\lambda^2 \cos 2z + 2\varrho I_\lambda^3 \sin 3z + \text{etc.}$$

Wenden wir ein bekanntes Theorem auf diese Reihe an, dann erhalten wir, wenn i eine ungrade Zahl ist

$$\varrho I_\lambda^i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\varrho \sin z} \sin iz\, dz \qquad \ldots\ldots\ldots (\Delta)$$

und wenn i eine grade Zahl ist

$$I_\lambda^i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\varrho \sin z} \cos iz dz \qquad \ldots\ldots\ldots (\Theta)$$

Sey nun, wenn i ungrade ist

$$V = c^{2\lambda\varrho \sin z} \cos iz$$

Hieraus ergiebt sich

$$dV = \varrho\lambda c^{2\varrho\lambda \sin z} \{\cos(i+1)z + \cos(i-1)z\} dz - ic^{2\varrho\lambda \sin z} \sin iz dz$$

Aber wenn i ungrade ist, sind $i+1$ und $i-1$ grade, deshalb und weil $\int dV = 0$ zwischen den Grenzen 0 und 2π, geben die vorstehenden Gleichungen

$$0 = \lambda \{I_\lambda^{i+1} + I_\lambda^{i-1}\} - i I_\lambda^i$$

Sey, wenn i grade ist

$$V = c^{2\lambda\varrho \sin z} \sin iz$$

hieraus

$$dV = \varrho\lambda c^{2\varrho\lambda \sin z} \{\sin(i+1)z + \sin(i-1)z\} dz + ic^{2\varrho\lambda \sin z} \cos iz\, dz$$

Dieser Ausdruck giebt auf gleiche Art wie eben

$$0 = \lambda \{I_\lambda^{i+1} + I_\lambda^{i-1}\} - i I_\lambda^i$$

welches dieselbe Gleichung ist, die eben unter der Voraussetzung, daſs i ungrade sey, gefunden wurde. Sie findet also zwischen je drei dieser Transcendenten statt, und ist identisch mit der von Bessel a. a. O. gegebenen.

Die vorstehende Gleichung (Θ) giebt, wenn wir $i = 0$ machen

$$I_\lambda^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\varrho\lambda \sin z} dz$$

oder wenn wir statt der imaginären Exponentialgröſse ihren Ausdruck durch Sinus und Cosinus einführen

$$I_\lambda^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\cos(2\lambda \sin z) + \varrho \sin(2\lambda \sin z)\right\} dz$$

Man findet aber leicht

$$\int_0^{2\pi} \sin(2\lambda \sin z)\, dz = 0$$

also

$$I_\lambda^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\lambda \sin z)\, dz$$

welches der bekannte Ausdruck für diese Transcendente ist, wenn man k für 2λ substituirt. Auf ähnliche Art bringt man die Gleichung ($\varDelta$) auf die bekannte Form der Transcendente I_λ^1.

48.

Bessel hat a. a. O. eine Tafel für die beiden Transcendenten I_λ^0 und I_λ^1 gegeben, welche bis $k = 3{,}2$ d. i. bis $\lambda = 1{,}6$ geht. Da diese Ausdehnung aber für den hier vorliegenden Zweck lange nicht ausreicht, so habe ich die im vorhergehenden Artikel erwähnte Tafel als Fortsetzung dieser berechnet, und bis $\lambda = 10$, d. i. bis $k = 20$ ausgedehnt. Es läſst sich zwar voraussehen, daſs Fälle vorkommen können, in welchen λ den Werth 10 übersteigt, allein solche werden nicht oft vorkommen, und jedenfalls läſst sich der Grenzwerth oder gröſste Werth von λ, welcher vorkommen kann, jetzt wenigstens nicht bestimmen. Ich werde aber jetzt ein Hülfsmittel angeben, durch welches man für jeden beliebigen Werth von λ sich dieser begrenzten Tafel zur Ermittelung der numerischen Werthe der in Rede stehenden Transcendenten bedienen kann. Dieses Hülfsmittel besteht in der Verdoppelung dieser Transcendenten. Wenn man in der ersten Reihe (B) des Art. 46. 2λ statt λ schreibt, so ergiebt sich

$$c^{2\lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)} = I_{2\lambda}^0 + I_{2\lambda}^1 x + I_{2\lambda}^2 x^2 + I_{2\lambda}^3 x^3 + \text{etc.}$$
$$- I_{2\lambda}^1 \frac{1}{x} + I_{2\lambda}^2 \frac{1}{x^2} - I_{2\lambda}^3 \frac{1}{x^3} \pm \text{etc.}$$

erhebt man aber dieselbe Reihe (B) in's Quadrat, so erhält man

$$c^{2\lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)} = (I_\lambda^0)^2 + 2I_\lambda^0 I_\lambda^1 x + 2I_\lambda^0 I_\lambda^2 x^2 + \text{etc.}$$
$$- 2I_\lambda^0 I_\lambda^1 \frac{1}{x} + 2I_\lambda^0 I_\lambda^2 \frac{1}{x^2} + \text{etc.}$$
$$+ (I_\lambda^1)^2 x^2 + 2I_\lambda^1 I_\lambda^2 x^3 + \text{etc.}$$
$$- 2(I_\lambda^1)^2 + 2I_\lambda^1 I_\lambda^2 \frac{1}{x} \mp \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden, so ergeben sich für die Duplication dieser Transcendenten folgende Reihen

$$\left.\begin{aligned} I^0_{2\lambda} &= (I^0_\lambda)^2 - 2(I^1_\lambda)^2 + 2(I^2_\lambda)^2 - 2(I^3_\lambda)^2 \pm \text{etc.} \\ I^1_{2\lambda} &= 2I^0_\lambda I^1_\lambda - 2I^1_\lambda I^2_\lambda + 2I^2_\lambda I^3_\lambda - 2I^3_\lambda I^4_\lambda \pm \text{etc.} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

u. s. w. Durch die Gleichung

$$1 = (I^0_\lambda)^2 + 2(I^1_\lambda)^2 + 2(I^2_\lambda)^2 + 2(I^3_\lambda)^2 + \text{etc.}$$

welche im Art. 46. abgeleitet wurde, kann die erste derselben vereinfacht und beliebig auf die eine oder andere der beiden folgenden Formen gebracht werden

$$I^0_{2\lambda} = -1 + 2(I^0_\lambda)^2 + 4(I^2_\lambda)^2 + 4(I^4_\lambda)^2 + \text{etc.}$$
$$I^0_{2\lambda} = \quad 1 - 4(I^1_\lambda)^2 - 4(I^3_\lambda)^2 - 4(I^5_\lambda)^2 - \text{etc.}$$

Auf ähnliche Art kann man überhaupt durch die Reihen (B) die Multiplicationen und Divisionen dieser Transcendenten bewirken, aber für größsere Zahlen wie die 2 werden die Reihen sehr zusammen gesetzt. Hat man nun für irgend einen Werth von λ, der die Ausdehnung der Tafel übersteigt, und den ich λ' nennen will, diese Transcendenten zu berechnen, so läfst sich immer eine ganze Zahl m dergestalt finden, dafs $\frac{\lambda'}{2^m}$ innerhalb der Grenzen der Tafel liegt. Mit dem Werthe

$$\lambda = \frac{\lambda'}{2^m}$$

mufs man nun die Transcendenten I^0_λ und I^1_λ aus der Tafel durch Interpolation entnehmen, und die übrigen zu diesem Werthe von λ gehörigen durch die im vor. Art. abgeleitete Bedingungsgleichung berechnen. Ist dies geschehen, so geben die eben entwickelten Gleichungen (1) durch m malige Anwendung die gesuchten Transcendenten $I^0_{\lambda'}$ und $I^1_{\lambda'}$.

Hat man in irgend einem speciellen Falle die Transcendenten I^0_λ und I^1_λ aus der Tafel I. entlehnt, so giebt die oben abgeleitete Relation zwischen je drei derselben

$$I^2_\lambda = \frac{1}{\lambda} I^1_\lambda - I^0_\lambda$$
$$I^3_\lambda = \frac{2}{\lambda} I^2_\lambda - I^1_\lambda$$
etc.

und überhaupt

$$I_\lambda^{i+1} = \frac{i}{\lambda} I_\lambda^i - I_\lambda^{i-1}$$
$$I_\lambda^{i+2} = \frac{i+1}{\lambda} I_\lambda^{i+1} - I_\lambda^i$$

Wenn man aber bei der Anwendung dieser Gleichungen so weit gekommen ist, daſs $i > \lambda$, so nimmt die Genauigkeit, mit der man durch dieselben die folgenden Transcendenten berechnen kann, ab, und der Fehler, womit die letzte Decimalstelle der ersten beiden Transcendenten behaftet ist, vergröſsert sich so, daſs zuletzt alle merklichen Ziffern unrichtig werden. Dieses tritt namentlich dann ein, wenn die Transcendente so klein geworden ist, daſs sie linker Hand halb so viele Nullen hat, wie die Anzahl der ursprünglich in Rechnung gezogenen Decimalstellen beträgt. Rechnet man z. B. mit den in der Tafel I. zu $\lambda = 4$ gegebenen Werthen von I_λ^0 und I_λ^1, die mit 6 Decimalen angesetzt sind, von welchen ich die letzte bis auf Eine Einheit verbürgen kann, die folgenden, zu diesem Werthe von λ gehörigen Transcendenten, so bekommt man unter andern

$$I_4^{15} = +0,000181$$

während der wahre Werth derselben

$$I_4^{15} = +0,000293$$

ist. Um diesem Uebelstande abzuhelfen giebt es zwei Mittel, entweder man berechne die Tafel für I_λ^0 und I_λ^1 mit einer wenigstens doppelt so groſsen Anzahl von Decimalen, als man in der nachherigen Anwendung für nöthig hält, oder man füge eine zweite Tafel, welche zwei andere dieser Transcendenten giebt, die einem gröſseren Werthe des Index i angehören, bei. Da das erstere Mittel bedeutend gröſsere Arbeit, sowohl bei der Berechnung der Tafel, als bei der nachherigen Anwendung derselben verursacht, so habe ich das andere gewählt, und demnach die Tafel II. beigefügt, welche die Transcendenten für die gröſseren Indices enthält, welche in den Ueberschriften angegeben sind. Die gemeinschaftliche Anwendung dieser beiden Tafeln besteht nun darin, daſs man aus der zweiten die Transcendenten mit kleinerem Index i bis dahin berechnet, wo die Werthe mit denen aus der ersten Tafel erlangten übereinstimmen. Alsdann kann man auch aus der zweiten Tafel vorwärts rechnen. Z. B. für $\lambda = 4$

	Aus Tafel I.	Aus Tafel II.	Diff.
$I_4^{15} =$	+ 0,000181	+ 0,000293	+ 0,000112
$I_4^{14} =$	0,000984	0,001019	+ 0,000035
$I_4^{13} =$	0,003262	0,003275	+ 0,000013
$I_4^{12} =$	0,009619	0,009624	+ 0,000005
$I_4^{11} =$	0,025594	0,025596	+ 0,000002
$I_4^{10} =$	0,060766	0,060766	0,000000

In diesem Falle kann man also, wenn man die Transcendenten bis auf die letzte Stelle richtig haben will, vermittelst der ersten Tafel nur bis I_4^{10} gehen. In sehr vielen Fällen sind übrigens von den sechs Decimalen, die die erste Tafel giebt, die drei letzten in der Anwendung überflüssig, und man kann somit ohne Zuziehung der zweiten Tafel alle anzuwendenden Transcendenten mit der nöthigen Genauigkeit aus I_λ^0 und I_λ^1 berechnen.

49.

Im vorhergehenden Artikel habe ich gezeigt, wie man die Transcendenten I_λ^i für solche Werthe von λ, die die Ausdehnung der Tafel übersteigen, aus den in dieser enthaltenen Transcendenten berechnen kann, aber dieses Verfahren hört auf bequem anwendbar zu seyn, wenn der Exponent m nicht eine sehr kleine Zahl ist. Ich werde daher hier Ausdrücke entwickeln, durch welche man I_λ^i direct berechnen kann, wenn λ die Ausdehnung der Tafel übersteigt, oder überhaupt eine grofse Zahl ist. Diese Ausdrücke erlange ich durch Entwickelung der Transcendente I_λ^0 in eine nach den absteigenden Potenzen von λ fortschreitende Reihe. Die Gleichungen (Δ) und (Θ) des Art. 47. geben

$$I_\lambda^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\varrho\sin z}\, dz$$

$$\varrho I_\lambda^1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\varrho\sin z}\sin z\, dz$$

$$I_\lambda^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\varrho\sin z}\cos 2z\, dz$$

Differentiiren wir die erste dieser Gleichungen, so bekommen wir

$$\frac{dI_\lambda^0}{d\lambda} = \frac{\varrho}{\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\varrho\sin z}\sin z\, dz = -2I_\lambda^1$$

$$\frac{d^2I_\lambda^0}{d\lambda^2} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\varrho\sin z}\{1-\cos 2z\}\, dz = 2I_\lambda^2 - 2I_\lambda^0$$

welche durch Hülfe der Bedingungsgleichung

$$I^2_\lambda - \frac{1}{\lambda} I^1_\lambda + I^0_\lambda = 0$$

die folgende linearische Differentialgleichung zweiter Ordnung geben

$$\text{(I)} \dots\dots\dots \quad \frac{d^2 I^0_\lambda}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dI^0_\lambda}{d\lambda} + 4I^0_\lambda = 0$$

Nehmen wir nun an, daſs λ eine groſse Zahl sey, so ist das Glied $\frac{1}{\lambda}\frac{dI^0_\lambda}{d\lambda}$ sehr klein, und wir können es daher in der ersten Annäherung übergehen. Wir haben demnach vorläufig zu integriren

$$\frac{d^2 I^0_\lambda}{d\lambda^2} + 4I^0_\lambda = 0$$

dessen Integral bekanntlich

$$I^0_\lambda = k \cos 2\lambda + k' \sin 2\lambda$$

ist, wo k und k' die dem Integral hinzugefügten Constanten sind. Diesen Ausdruck für I^0_λ kann man als einen genäherten Werth derselben ansehen, wenn λ eine groſse Zahl ist. Substituiren wir denselben in die Gleichung (I), und sehen bei den dazu erforderlichen Differentiationen k und k' als veränderliche Gröſsen an. Da hieraus eine identische Gleichung entstehen muſs, so müssen die Coefficienten von sin 2λ und cos 2λ jeder für sich gleich Null werden, somit ergiebt sich

$$\frac{d^2 k}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dk}{d\lambda} + 4\frac{dk'}{d\lambda} + \frac{2k'}{\lambda} = 0$$

$$\frac{d^2 k'}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dk'}{d\lambda} - 4\frac{dk}{d\lambda} - \frac{2k}{\lambda} = 0$$

Setzen wir nun

$$k = \frac{\alpha}{\lambda^a} + \frac{\alpha_1}{\lambda^{a+1}} + \frac{\alpha_2}{\lambda^{a+2}} + \text{etc.}$$

$$k' = \frac{\beta}{\lambda^a} + \frac{\beta_1}{\lambda^{a+1}} + \frac{\beta_2}{\lambda^{a+1}} + \text{etc.}$$

und substituiren diese Werthe von k und k', in welchen α, α_1, etc. β, β_1, etc. Constanten sind, in die vorhergehenden Gleichungen, so geben die mit verschiedenen Potenzen von λ multiplicirten Glieder die folgenden Gleichungen

$$
\begin{array}{ll}
2\beta - 4a\beta = 0, & 2\alpha - 4a\alpha = 0 \\
a^2\alpha - (4a+2)\beta_1 = 0, & a^2\beta + (4a+2)\alpha_1 = 0 \\
(a+1)^2\alpha_1 - (4a+6)\beta_2 = 0, & (a+1)^2\beta_1 + (4a+6)\alpha_2 = 0 \\
(a+2)^2\alpha_2 - (4a+10)\beta_3 = 0, & (a+2)^2\beta_2 + (4a+10)\alpha_3 = 0 \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

Die erste Gleichung einer jeden dieser beiden Abtheilungen giebt $a = \frac{1}{2}$, und hiemit gehen die übrigen in folgende über

$$
\begin{array}{ll}
\frac{1}{4}\alpha - 4\beta_1 = 0, & \frac{1}{4}\beta + 4\alpha_1 = 0 \\
\frac{9}{4}\alpha_1 - 8\beta_2 = 0, & \frac{9}{4}\beta_1 + 8\alpha_2 = 0 \\
\frac{25}{4}\alpha_2 - 12\beta_3 = 0, & \frac{25}{4}\beta_2 + 12\alpha_3 = 0 \\
\frac{49}{4}\alpha_3 - 16\beta_4 = 0, & \frac{49}{4}\beta_3 + 16\alpha_4 = 0 \\
\frac{81}{4}\alpha_4 - 20\beta_5 = 0, & \frac{81}{4}\beta_4 + 20\alpha_5 = 0 \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

die man nach Belieben fortsetzen kann, da das Gesetz des Fortganges offenbar ist. Es ergiebt sich aus diesen Gleichungen

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1 = -\frac{1}{16}\beta & \beta_1 = \frac{1}{16}\alpha \\
\alpha_2 = -\frac{9}{512}\alpha & \beta_2 = -\frac{9}{512}\beta \\
\alpha_3 = +\frac{75}{8192}\beta & \beta_3 = -\frac{75}{8192}\alpha \\
\alpha_4 = +\frac{3675}{524288}\alpha & \beta_4 = +\frac{3675}{524288}\beta \\
\alpha_5 = -\frac{297675}{41943040}\beta & \beta_5 = +\frac{297675}{41943040}\alpha \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

wo α und β willkührlich bleiben. Wir haben somit erhalten

$$
k = \frac{\alpha}{\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{\beta}{16\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{9\alpha}{512\lambda^{\frac{5}{2}}} + \frac{75\beta}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}} + \frac{3675\alpha}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}} - \frac{297675\beta}{41943040\lambda^{\frac{11}{2}}} \mp \text{etc.}
$$

$$
k' = \frac{\beta}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha}{16\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{9\beta}{512\lambda^{\frac{5}{2}}} - \frac{75\alpha}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}} + \frac{3675\beta}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}} + \frac{297675\alpha}{41943040\lambda^{\frac{11}{2}}} \mp \text{etc.}
$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in den oben gefundenen Ausdruck für I^0_λ, und setzen dabei $\alpha = c\cos c'$, $\beta = c\sin c'$, so ergiebt sich

$$I_\lambda^0 = c\left\{\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{9}{512\lambda^{\frac{5}{2}}} + \frac{3675}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}} \mp \text{etc.}\right\}\cos(2\lambda - c')$$
$$+ c\left\{\frac{1}{16\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{75}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}} + \frac{297675}{41943040\lambda^{\frac{11}{2}}} \mp \text{etc.}\right\}\sin(2\lambda - c')$$

und dieser Ausdruck ist wegen der darin enthaltenen zwei willkührlichen Constanten c und c' das vollständige Integral der Gleichung (1). Je gröſser λ ist, desto genauer kann man durch diese Gleichung I_λ^0 berechnen; die Reihen, die in derselben vorkommen, gehören zu denjenigen, deren Coefficienten in den ersten Gliedern convergiren, aber nach und nach zu divergiren anfangen. Je gröſser nun λ ist, desto später tritt für die vollständigen Glieder dieser Reihen diese Divergenz ein, und desto genauer kann man I_λ^0 daraus berechnen. Wenn λ bedeutend groſs ist, so reicht man mit dem ersten Gliede der ersten Reihe aus, und in diesem Falle gewährt also dieser Ausdruck eine ungemein kurze Rechnung. Aber auch wenn λ nicht sehr groſs ist, kann man durch den obigen Ausdruck I_λ^0 mit einer in den meisten Fällen hinreichenden Genauigkeit berechnen, wie ich weiter unten durch ein numerisches Beispiel zeigen werde.

50.

Es ist noch die Bestimmung der Constanten c und c' übrig. Um diese zu erhalten, werde ich das erste Glied des Ausdrucks für I_λ^0 auf eine, dem von Laplace gegebenen Verfahren zur Auffindung der Integrale, die von groſsen Zahlen abhängen, analoge Weise entwickeln. Im Art. 47. wurde folgender Ausdruck abgeleitet

$$I_\lambda^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\lambda \sin z)\, dz$$

Dieses Integral kann man in vier gleiche, beziehungsweise von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, von $\frac{\pi}{2}$ bis π, von π bis $\frac{3}{2}\pi$, und von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π zu integrirende Theile zerlegen, es ist daher auch

$$I_\lambda^0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\lambda \sin z)\, dz$$

Substituiren wir hierin für den Cosinus seinen Ausdruck durch imaginäre Exponentialgröſsen, so ergiebt sich

$$I_\lambda^0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} c^{2\varrho\lambda \sin z}\, dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} c^{-2\varrho\lambda \sin z}\, dz$$

wo c die Grundzahl der hyperbolischen Logarithmen, und $\varrho = \sqrt{-1}$ ist. Setzen wir nun im ersten dieser Integrale

$$2\varrho\lambda \sin z = 2\varrho\lambda - t^2$$

dann ergiebt sich

$$dz = \frac{-dt}{\sqrt{\varrho\lambda}\sqrt{1-\frac{t^2}{4\varrho\lambda}}}$$

und es correspondiren die Werthe

$$z = 0 \quad \text{und} \quad t = \sqrt{2\varrho\lambda}$$
$$z = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad t = 0$$

Setzen wir im zweiten Integral

$$-2\varrho\lambda \sin z = -2\varrho\lambda - t^2$$

dann bekommen wir

$$dz = -\sqrt{\frac{\varrho}{\lambda}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{\varrho t^2}{4\lambda}}}$$

und es correspondiren die Werthe

$$z = 0 \quad \text{und} \quad t = \sqrt{\frac{2\lambda}{\varrho}}$$
$$z = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad t = 0$$

Hiemit geht unser Ausdruck für I_λ^0 in

$$I_\lambda^0 = \frac{c^{2\varrho\lambda}}{\pi\sqrt{\varrho}\cdot\sqrt{\lambda}}\int_0^a \frac{c^{-t^2}dt}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4\varrho\lambda}}} + \frac{c^{-2\varrho\lambda}\sqrt{\varrho}}{\pi\sqrt{\lambda}}\int_0^b \frac{c^{-t^2}\,dt}{\sqrt{1-\frac{\varrho t^2}{4\lambda}}}$$

über, wo zur Abkürzung a statt $\sqrt{2\varrho\lambda}$ und b statt $\sqrt{\frac{2\lambda}{\varrho}}$ geschrieben worden ist. Da uns hier bloſs um die Ermittelung des ersten Gliedes der Entwickelung von I_λ^0 zu thun ist, dieses dem vorhergehenden Artikel zufolge mit $\lambda^{\frac{1}{2}}$ dividirt ist, und die Coefficienten der Integrale des vorstehenden Ausdrucks diesen Divisor bereits enthalten, so brauchen wir in den Integralen selbst nur die von λ unabhängigen Glieder zu ermitteln. Aus den Grenzwerthen 0 und resp. a und b erkennt man, daſs innerhalb der Grenzen der Integrale die im

Nenner derselben vorkommenden Wurzelgrößen zwischen den Grenzen 1 und $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ sich bewegen, und daher in convergirende unendliche Reihen entwickelt werden können. Nach dieser Entwickelung erhalten wir eine Reihe von Integralen von folgender Form

$$A\,\frac{1}{(4\varrho\lambda)^n}\int_0^a t^{2n}\,c^{-t^2}\,dt \quad\text{und}\quad A\left(\frac{\varrho}{4\lambda}\right)^n\int_0^b t^{2n}\,c^{-t^2}\,dt$$

wo A den betreffenden Binominalcoefficienten der Potenz $-\tfrac{1}{2}$, und n eine ganze und positive Zahl bedeutet. Die bekannte Form dieser Integrale giebt aber für das erstere Integral, wenn wir die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder mit α, β, ... θ bezeichnen,

$$\frac{1}{(4\varrho\lambda)^n}\int_0^a t^{2n}\,c^{-t^2}\,dt = \frac{c^{-2\varrho\lambda}}{2^n}\left\{\alpha(2\varrho\lambda)^{-\frac{1}{2}} + \beta(2\lambda\varrho)^{-\frac{3}{2}} + \ldots + \theta(2\varrho\lambda)^{-n+\frac{1}{2}}\right\}$$
$$-\theta\frac{\sqrt{\pi}}{2(4\varrho\lambda)^n} + \theta\,\frac{c^{-2\varrho\lambda}}{2^n(2\varrho\lambda)^{n+\frac{1}{2}}}\left\{1 - \frac{1}{2(2\varrho\lambda)} + \ldots\right\}$$

und einen ähnlichen Ausdruck für das andere. Hieraus geht hervor, daſs diese Integrale, wenn n nicht $= 0$ ist, kein Glied enthalten, in welchem λ nicht im Nenner vorkäme, sie müssen daher übergangen werden, und es bleibt nur das erste Glied der Reihenentwickelung der im Nenner unserer Integrale vorkommenden Wurzelgröſsen zu berücksichtigen übrig, nemlich

$$\int_0^a c^{-t^2}\,dt \quad\text{und}\quad \int_0^b c^{-t^2}\,dt$$

wofür wir

$$\int_0^\infty c^{-t^2}\,dt - \int_a^\infty c^{-t^2}\,dt \quad\text{und}\quad \int_0^\infty c^{-t^2}\,dt - \int_b^\infty c^{-t^2}\,dt$$

schreiben wollen. Da nun aber für irgend eine Anfangsgrenze e

$$\int_e^\infty = \frac{c^{-e^2}}{e}\left\{1 - \frac{1}{2e^2} + \ldots\right\}$$

ist, hierin also auch kein von e unabhängiges Glied vorkommt, so reducirt sich endlich unser Ausdruck für I_λ^0 auf folgenden

$$I_\lambda^0 = \left\{\frac{c^{2\varrho\lambda}}{\sqrt{\varrho}} + c^{-2\varrho\lambda}\sqrt{\varrho}\right\}\frac{1}{\pi\lambda^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty c^{-t^2}\,dt$$

Aber es ist

$$\int_0^\infty c^{-t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\sqrt{\varrho} = \cos\frac{\pi}{4} + \varrho\sin\frac{\pi}{4} = c^{\frac{1}{4}\varrho\pi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}} = \cos\frac{\pi}{4} - \varrho\sin\frac{\pi}{4} = c^{-\frac{1}{4}\varrho\pi}$$

durch deren Substitution der eben gefundene Ausdruck sich in folgenden verwandelt

$$I_\lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\lambda^{\frac{1}{2}}}\cos(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem ersten Gliede des im vor. Art. entwickelten Ausdrucks für I_λ^0, so ergeben sich für die dort c und c' genannten Constanten folgende Werthe

$$c = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad c' = \tfrac{1}{4}\pi$$

und wir erhalten somit vollständig

$$\begin{aligned} I_\lambda^0 = {} & \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{9}{512\lambda^{\frac{5}{2}}} + \frac{3675}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}} \mp \text{etc.}\right\}\cos(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{16\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{75}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}} + \frac{297675}{41943040\lambda^{\frac{11}{2}}} \mp \text{etc.}\right\}\sin(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi) \end{aligned}$$

51.

Im Art. 49. wurde die Gleichung

$$I_\lambda^1 = -\tfrac{1}{2}\frac{dI_\lambda^0}{d\lambda}$$

abgeleitet, wenden wir auf diese den eben gefundenen Ausdruck für I_λ^0 an, so bekommen wir

$$\begin{aligned} I_\lambda^1 = {} & \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{15}{512\lambda^{\frac{5}{2}}} - \frac{4725}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}} \pm \text{etc.}\right\}\sin(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{3}{16\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{105}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}} + \frac{363825}{41943040\lambda^{\frac{11}{2}}} \mp \text{etc.}\right\}\cos(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi) \end{aligned}$$

Da durch Hülfe der Gleichungen $(\varDelta)$ und $(\varTheta)$ des Art. 47. sich allgemein ergiebt

$$I_\lambda^{i+1} = \frac{i}{2\lambda} I_\lambda^i - \tfrac{1}{2} \frac{dI_\lambda^i}{d\lambda}$$

so kann man durch fortgesetzte Differentiation des eben gefundenen Ausdrucks für I_λ^0 alle Transcendenten I_λ^i explicite durch Reihen, welche nach den absteigenden Potenzen von λ geordnet sind, ausdrücken. Aber bei jeder Differentiation nimmt die Convergenz dieser Reihen ab, und deshalb ist es zweckmäfsiger nur I_λ^0 und I_λ^1 explicite auf diese Art auszudrücken, und die übrigen aus diesen durch die Bedingungsgleichung

$$I_\lambda^{i+1} = \frac{i}{\lambda} I_\lambda^i - I_\lambda^{i-1}$$

zu berechnen. Um zu zeigen, für wie kleine Werthe von λ die obigen absteigenden Reihen *) anwendbar sind, werde ich durch dieselben I_4^0 und I_4^1 berechnen, und mit den aus den strengen, aufsteigenden Reihen berechneten Werthen vergleichen. Setzen wir $\lambda = 4$, so bekommen wir nach Abzug der ganzen Kreisperipherien

$$2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi = 53^\circ\, 21'\, 58'',45 \begin{cases} \text{log. cos} = 9{,}7757545 \\ \text{log. sin} = 9{,}9044267 \end{cases}$$

und die Werthe der Coefficienten des Ausdruckes für I_4^0 sind der Reihe nach

	+ 0,2820947		+ 0,0044077
	− 0,0003099		− 0,0000404
	+ 0,0000077		+ 0,0000019
Summe . . .	+ 0,2817925	. . . .	+ 0,0043692

---

*) Aus diesen Reihen zieht man unter andern die Gleichung

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\pi(k + \tfrac{3}{4}) + \frac{1}{32\lambda} - \frac{25}{6144\lambda^3} + \frac{1073}{327680\lambda^5} \mp \text{etc.}$$

die, wenn man nach und nach $k = 0, = 1, = 2$, etc. macht, alle Wurzeln der transcendenten Gleichung $I_\lambda^0 = 0$ giebt, und zwar mit desto gröfserer Annäherung, je gröfser man k annimmt. Ferner giebt

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\pi(k + \tfrac{1}{4}) - \frac{3}{32\lambda} + \frac{21}{2048\lambda^3} - \frac{1899}{327680\lambda^5} \pm \text{etc.}$$

unter denselben Bedingungen die Wurzeln der Gleichung $I_\lambda^1 = 0$, wo jedoch die Wurzel $\lambda = 0$ nur mit sehr geringer Annäherung gefunden wird. Aehnliche Gleichungen kann man für die übrigen transcendenten Gleichungen $I_\lambda^i = 0$ ableiten. Diese Gleichungen können in der vorstehenden Gestalt leicht durch Annäherungen aufgelöst werden, und geben sogleich zu erkennen, dafs, wenn k, und mithin auch λ eine grofse Zahl ist, die Differenz zwischen je zwei auf einander folgenden Wurzeln nahe $= \tfrac{1}{2}\pi$ ist.

Multiplicirt man den ersten dieser Zahlenwerthe mit cos $(2\lambda - \frac{1}{4}\pi)$ und den andern mit sin $(2\lambda - \frac{1}{4}\pi)$, so ergiebt sich

$$\begin{array}{rl} & +\ 0{,}1681450 \\ & +\ 0{,}0035061 \\ \hline I_4^0 = & +\ 0{,}1716511 \end{array}$$

Für die Berechnung von I_4^1 bekommt man die Coefficienten des obigen Ausdrucks der Reihe nach, wie folgt

	+ 0,2820947		+ 0,0132232
	+ 0,0005165		− 0,0000565
	− 0,0000099		+ 0,0000024
Summe ...	+ 0,2826013	....	+ 0,0131691

und nach der Multiplication dieser Aggregate mit sin $(2\lambda - \frac{1}{4}\pi)$ und cos $(2\lambda - \frac{1}{4}\pi)$

$$\begin{array}{rl} & +\ 0{,}2267779 \\ & +\ 0{,}0078580 \\ \hline I_4^1 = & +\ 0{,}2346359 \end{array}$$

Berechnen wir dieselben Transcendenten nach den Reihen (C) des Art. 46., so ergeben sich für I_4^0 die numerischen Werthe der einzelnen Glieder, wie folgt,

	positive Glieder.		negative Glieder.
	1,		
	64,		16,
	113,77777777		113,77777777
	32,36345679		72,81777777
	2,64191484		10,56765936
	0,08349756		0,52185972
	0,00122677		0,01104100
	0,00000948		0,00011615
	0,00000004		0,00000067
Summe ...	213,86788325	...	213,69623244
	− 213,69623244		
$I_4^0 =$	+ 0,1716508		

Unterschied mit dem oben berechneten Werthe = 0,0000003. Für I_4^1 erhalten wir die

	positiven Glieder.		negativen Glieder.
4 ×	1,		8,
	21,33333333		28,44444444
	22,75555555		12,13629629
	4,62335097		1,32095742
	0,29354609		0,05218597
	0,00759069		0,00092008
	0,00009436		0,00000830
	0,00000063		0,00000004
Summe . . .	50,01347162	. . . .	49,95481254
	− 49,95481254		
	+ 0,05865908		
$I_4^1 =$	+ 0,2346363		

Unterschied mit dem oben berechneten Werthe $= 0{,}0000004$.

52.

Die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke müssen nun zuerst auf die Ermittelung von W aus $\frac{Tdt}{du}$ angewandt werden. Da wir im vorhergehenden Paragraphen diese Gröſse auf folgende Form gebracht haben

$$Tdt = \Sigma(x,i,i')_s \sin(xv+iu+i'g')\,du + \Sigma(x,i,i')_c \cos(xv+iu+i'g')\,du$$

wo $(x,i,i')_s$ und $(x,i,i')_c$ numerische Coefficienten sind, so finden die in diesem Paragraphen entwickelten Integrale unmittelbare Anwendung, wenn wir

$$A = xv$$

machen. Hiemit, und weil der Index x nur die drei Werthe 0, $+1$, -1 annehmen kann, nimmt das Integral folgende Form an

$$\begin{aligned}\int Tdt = \Sigma\{x,i,i'\}_c \cos(xv+iu+i'g') + \Sigma\{x,i,i'\}_s \sin(xv+iu+i'g')\\ + (1,0,0)_c\,u\cos v + (1,0,0)_s\,u\sin v + (0,0,0)_c\,u\end{aligned}$$

wo

$$(1) \ldots\ldots \left\{\begin{aligned}\{x,i,i'\}_c = (x,i,i')_c\,\alpha_i^i + (x,i-1,i')_c\,\alpha_{i-1}^{i-1}p_i + (x,i-2,i')_c\,\alpha_{i-2}^{i-2}p_{i-1}p_i + \text{etc.}\\ + (x,i+1,i')_c\,\alpha_{i+1}^{i+1}q_i + (x,i+2,i')_c\,\alpha_{i+2}^{i+2}q_{i+1}q_i + \text{etc.}\end{aligned}\right.$$

und $-\{x,i,i'\}_c$ eben so aus $(x,i,i')_s$, etc. entsteht. Verwandeln wir nun in dem im Art. 30. gegebenen Ausdruck für W die wahre Anomalie in die excentrische, so bekommen wir

$$W = -b + 2\xi(\cos v + \tfrac{1}{2}e) - 2\eta\sqrt{1-e^2}\,.\sin v + \int T dt$$

Man sieht hieraus, daſs die auſserhalb des Integralzeichens befindlichen Glieder die nemliche Form haben, wie die unter dem Integralzeichen befindlichen, und sich also mit einigen dieser vereinigen. Wie die Gröſsen b, ξ und η bestimmt werden müssen, wenn man osculirende Elemente der Rechnung zu Grunde gelegt hat, habe ich im Art. 30. gezeigt. Wir haben nun nach der Bestimmung der Werthe der Gröſsen b, ξ, η und der Verwandelung von v und u

$$\overline{W} = \Sigma\{i,i'\}_c \cos(iu+i'g') + \Sigma\{i,i'\}_s \sin(iu+i'g')$$
$$+(1,0,0)_c u\cos u + (1,0,0)_s u \sin u + (0,0,0)_c u$$

wo

$$\left.\begin{aligned}\{i,i'\}_c &= \{0,i,i'\}_c + \{-1,i+1,i'\}_c + \{1,i-1,i'\}_c\\ \{i,i'\}_s &= \{0,i,i'\}_s + \{-1,i+1,i'\}_s + \{1,i-1,i'\}_s\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ausgenommen

$$\left.\begin{aligned}\{0,0\}_c &= \{1,-1,0\}_c - b + e\xi\\ \{1,0\}_c &= \{0,\ 1,\ 0\}_c + \{-1,2,0\}_c + 2\xi\\ \{1,0\}_s &= \{0,\ 1,\ 0\}_s + \{-1,2,0\}_s - 2\sqrt{1-e^2}\,.\,\eta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

53.

Da nun

$$nz = g + n\int\overline{W}dt$$

so können wir aus den Coefficienten von $\overline{W}$, deren Berechnung so eben gezeigt wurde, die entsprechenden Coefficienten von nz ohne Weiteres berechnen. Es ergiebt sich fürerst

$$n(1,0,0)_c\int u\cos u dt + n(1,0,0)_s\int u \sin u dt + n(0,0,0)_c\int u dt =$$
$$\{\tfrac{1}{2}(0,0,0)_c - \tfrac{1}{4}e(1,0,0)_c\}n^2t^2$$
$$+(1-\tfrac{1}{2}e^2)(1,0,0)_c nt\sin u - (1,0,0)_s nt\cos u$$
$$-\tfrac{1}{4}e(1,0,0)_c nt\sin 2u + \tfrac{1}{4}e(1,0,0)_s nt\cos 2u$$
$$+(1-\tfrac{1}{8}e^2)(1,0,0)_s\sin u + \{(1-\tfrac{1}{8}e^2)(1,0,0)_c - e(0,0,0)_c\}\cos u$$
$$-\tfrac{5}{8}e(1,0,0)_s\sin 2u + \{(\tfrac{1}{8}e^3 - \tfrac{5}{8}e)(1,0,0)_c + \tfrac{1}{4}e^2(0,0,0)_c\}\cos 2u$$
$$+\tfrac{1}{8}e^2(1,0,0)_s\sin 3u + \tfrac{1}{8}e^2(1,0,0)_c\cos 3u$$

wo zu bemerken ist, daſs in dem mit t^2 multiplicirten Gliede die beiden Theile, aus welchen es besteht, sich gegenseitig aufheben müssen, also

$$\tfrac{1}{2}\,(0,0,0)_c - \tfrac{1}{4}\,e\,(1,0,0)_c = 0$$

ist, welche Gleichung zur Prüfung eines Theils der numerischen Rechnung angewandt werden kann. Wir haben sodann

$$\begin{aligned} nz = g &+ \Sigma[i,i']_s \sin(iu+i'g') + \Sigma[i,i']_c \cos(iu+i'g') \\ &+ \alpha_1 t \sin u \qquad\qquad + \beta_1 t \cos u \\ &+ \alpha_2 t \sin 2u \qquad\quad\; + \beta_2 t \cos 2u \end{aligned}$$

wo

$$(1)\;\ldots\;\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= n\left(1-\tfrac{1}{2}e^2\right)(1,0,0)_c \\ \beta_1 &= -\,n\,(1,0,0)_s \\ \alpha_2 &= -\,n\,\tfrac{1}{4}\,e\,(1,0,0)_c \\ \beta_2 &= n\,\tfrac{1}{4}\,e\,(1,0,0)_s \end{aligned}\right.$$

$$(2)\;\ldots\;\left\{\begin{aligned} [i,i']_s = {} & \tfrac{1}{i'\nu}\{i,i'\}_c - \tfrac{i}{i'\nu}\{i,i'\}_c\,\alpha_i^i - \tfrac{i-1}{i'\nu}\{i-1,i'\}_c\,\alpha_{i-1}^{i-1}p_i - \tfrac{i-2}{i'\nu}\{i-2,i'\}_s\,\alpha_{i-2}^{i-2}p_{i-1}p_i - \text{etc.} \\ & - \tfrac{i+1}{i'\nu}\{i+1,i'\}_c\,\alpha_{i+1}^{i+1}q_i - \tfrac{i+2}{i'\nu}\{i+2,i'\}_s\,\alpha_{i+2}^{i+2}q_{i+1}q_i - \text{etc.} \\ [i,i']_c = {} & -\tfrac{1}{i'\nu}\{i,i'\}_s + \tfrac{i}{i'\nu}\{i,i'\}_s\,\alpha_i^i + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

den Fall $i' = 0$ ausgenommen, für welchen sich ergiebt

$$(3)\;\ldots\;\left\{\begin{aligned} [1,0]_s &= \left(1-\tfrac{1}{2}e^2\right)\{1,0\}_s - \tfrac{1}{2}e\{2,0\}_s + \left(1-\tfrac{1}{8}e^2\right)(1,0,0)_s \\ [2,0]_s &= -\tfrac{1}{4}e\{1,0\}_c + \tfrac{1}{2}\{2,0\}_c - \tfrac{1}{4}e\{3,0\}_c - \tfrac{5}{8}\,e\,(1,0,0)_s \\ [3,0]_s &= -\tfrac{1}{6}e\{2,0\}_c + \tfrac{1}{3}\{3,0\}_s - \tfrac{1}{6}e\{4,0\}_s + \tfrac{1}{8}\,e^2\,(1,0,0)_s \\ [4,0]_s &= -\tfrac{1}{8}e\{3,0\}_c + \tfrac{1}{4}\{4,0\}_c - \tfrac{1}{8}e\{5,0\}_c \\ &\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

$$(4)\;\ldots\;\left\{\begin{aligned} [1,0]_c &= -\{1,0\}_s + \tfrac{1}{2}e\{2,0\}_s + \left(1-\tfrac{1}{8}e^2\right)(1,0,0)_c - e\,(0,0,0)_s \\ [2,0]_c &= \tfrac{1}{4}e\{1,0\}_s - \tfrac{1}{2}\{2,0\}_s + \tfrac{1}{4}e\{3,0\}_s + \left(\tfrac{1}{8}e^2 - \tfrac{5}{8}e\right)(1,0,0)_s + \tfrac{1}{4}e^2\,(0,0,0)_c \\ [3,0]_c &= \tfrac{1}{6}e\{2,0\}_s - \tfrac{1}{3}\{3,0\}_s + \tfrac{1}{6}e\{4,0\}_s + \tfrac{1}{8}e^2\,(1,0,0)_c \\ [4,0]_c &= \tfrac{1}{8}e\{3,0\}_s - \tfrac{1}{4}\{4,0\}_s + \tfrac{1}{8}e\{5,0\}_s \\ &\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Aufser diesen Gliedern giebt diese Integration in nz ein der Zeit proportionales Glied, dessen Coefficient =

$$n\{0,0\}_c - \tfrac{1}{2}\,ne\,\{1,0\}_c$$

ist. Da zufolge des Art. 30. b so bestimmt werden mufs, dafs dieses Glied verschwindet, so bekommen wir

$$\{0,0\}_c - \tfrac{1}{2} e \,\{1,0\}_s = 0$$

und wenn wir hierin die im vorhergehenden Artikel unter (3) gegebenen Werthe von $\{0,0\}_c$ und $\{1,0\}_c$ substituiren,

$$b = \{1,-1,0\}_c - \tfrac{1}{2} e \,\{0,1,0\}_c - \tfrac{1}{2} e \,\{-1,2,0\}_c \qquad \text{.......... (5)}$$

54.

Den im Art. 30. angeführten Ausdruck für w verwandelt man leicht in folgenden

$$w = C + \tfrac{1}{6} b - \tfrac{1}{2} e\zeta - \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{d\overline{W}}{dv}\right) du$$

Den hier erforderlichen Differentialquotienten von W nach v bekommt man wie folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\overline{W}}{dv}\right) = {} & \Sigma (i,i')_s \sin(iu + i'g') + \Sigma (i,i')_c \cos(iu + i'g') \\ & - (1,0,0)_s u \sin u + (1,0,0)_c u \cos u + \{1,-1,0\}_c\end{aligned}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}(i,i')_c &= \{-1,i+1,i'\}_c - \{1,i-1,i'\}_c \\ (i,i')_s &= -\{-1,i+1,i'\}_s + \{1,i-1,i'\}_s\end{aligned}\right\} \text{.......... (A)}$$

und blos die drei Glieder eine Ausnahme machen, die in dem vorstehenden Ausdruck einzeln hingeschrieben worden sind. Da nun

$$\begin{aligned}& -(1,0,0)_s \int u \sin u \, du + (1,0,0)_c \int u \cos u \, du + \{1,-1,0\}_c \int du = \\ & \{1,-1,0\}_c u + (1,0,0)_s u \cos u + (1,0,0)_c u \sin u \\ & \qquad + (1,0,0)_c \cos u - (1,0,0)_s \sin u\end{aligned}$$

so ergiebt sich hieraus

$$\begin{aligned}w = {} & \tfrac{1}{2}\Sigma [(i,i')]_s \cos(iu + i'g') + \tfrac{1}{2}\Sigma [(i,i')]_c \sin(iu + i'g') \\ & + [(0,0)]_c - \tfrac{1}{2}\{1,-1,0\}_c u - \tfrac{1}{2}(1,0,0)_s u \cos u - \tfrac{1}{2}(1,0,0)_c u \sin u\end{aligned}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}[(i,i')]_c &= (i,i')_c \alpha_i^i + (i-1,i')_c \alpha_{i-1}^{i-1} p_i + \text{etc.} \\ & \qquad + (i+1,i')_c \alpha_{i+1}^{i+1} q_i + \text{etc.} \\ [(i,i')]_s &= -(i,i')_s \alpha_i^i - \text{etc.} \\ & \qquad - \text{etc.}\end{aligned}\right\} \text{......... (B)}$$

ausgenommen

(C) .... $\left\{\begin{array}{l} [(1,0)]_c = (1,0)_c - (1,0,0)_s \\ [(2,0)]_c = \frac{1}{2}(2,0)_c \\ \quad\text{etc.} \\ [(1,0)]_s = -(1,0)_s + (1,0,0)_c \\ [(2,0)]_s = -\frac{1}{2}(2,0)_s \\ \quad\text{etc.} \end{array}\right.$

Um die Zusammensetzung des constanten, im vorstehenden Ausdrucke für w mit $[(0,0)]_c$ bezeichneten Gliedes zu finden bemerke ich zuerst, daſs dieses zufolge der allgemeinen, zu Anfange dieses Artikels angeführten Formel $= C + \frac{1}{6}b - \frac{1}{2}e\xi$ ist, wo zufolge des Art. 30. C das constante in $-\frac{1}{2}\frac{dz}{dt}$, das ist hier in $-\frac{1}{2}\overline{W}$, befindliche Glied ist. Nach dem Art. 52. ist aber $\{0,0\}_c$ das constante in $\overline{W}$ enthaltene Glied, also

$$C = -\tfrac{1}{2}\{0,0\}_c = -\tfrac{1}{2}\{1,-1,0\}_c + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}e\xi$$

Hiemit erhalten wir sogleich

(D) .... $$[(0,0)]_c = -\tfrac{1}{2}\{1,-1,0\}_c + \tfrac{2}{3}b - e\xi$$

Der Controle der numerischen Rechnung wegen, von welcher ich im nächstfolgenden Artikel reden werde, ist es vortheilhafter, in w zuerst u auſserhalb des Cosinus und Sinus zu lassen, wie in dem obigen Ausdrucke geschehen ist. Nachher eliminirt man u durch die Gleichung $u = nt + e\sin u$, wodurch

(E) .... $$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\{1,-1,0\}_c u - \frac{1}{2}(1,0,0)_c u\cos u - \frac{1}{2}(1,0,0)_s u\sin u = \\ -\frac{1}{2}n\{1,-1,0\}_c t - \frac{1}{2}n(1,0,0)_c t\cos u - \frac{1}{2}n(1,0,0)_s t\sin u \\ -\frac{1}{4}e(1,0,0)_s - \frac{1}{2}e\{1,-1,0\}_c \sin u + \frac{1}{4}e(1,0,0)_s \cos 2u - \frac{1}{4}e(1,0,0)_c \sin 2u \end{array}\right.$$

wird, welche Glieder man für jene drei substituiren muſs. Wollte man vorziehen, diese Reduction gleich bei der Integration zu machen, so würde man erhalten

$$w = \tfrac{1}{2}\Sigma[(i,i')]'_c \cos(iu + i'g') + \tfrac{1}{2}\Sigma[(i,i')]'_s \sin(iu + i'g')$$
$$+ [(0,0)]'_c - \tfrac{1}{2}n\{1,-1,0\}_c t - \tfrac{1}{2}n(1,0,0)_c t\cos u - \tfrac{1}{2}n(1,0,0)_s t\sin u$$

wo

$$[(i,i')]'_c = [(i,i')]_c;\; [(i,i')]'_s = [(i,i')]_s$$

ausgenommen

$$[(0,0)]'_c = -\tfrac{1}{2}\{1,-1,0\}_s - \tfrac{1}{4}e(1,0,0)_s + \tfrac{2}{3}b - e\xi$$
$$[(1,0)]'_c = (1,0)_s - (1,0,0)_s$$
$$[(2,0)]'_c = \tfrac{1}{2}(2,0)_s + \tfrac{1}{2}e(1,0,0)_s$$
$$[(3,0)]'_c = \tfrac{1}{3}(3,0)_s$$
etc.

$$[(1,0)]'_s = -(1,0)_c + (1,0,0)_c - e\{1,-1,0\}_s$$
$$[(2,0)]'_s = -\tfrac{1}{2}(2,0)_c - \tfrac{1}{2}e(1,0,0)_c$$
$$[(3,0)]'_s = -\tfrac{1}{3}(3,0)_c$$
etc.

55.

Um die im Vorhergehenden beschriebene Rechnung einer Controle zu unterwerfen, dient die Gleichung

$$S+\varepsilon = \tfrac{1}{3}b - e\xi + \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\int\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right)dt$$

wo v_1 die Länge des Kometen in seiner Bahn bedeutet, und in dem hier vorkommenden Differentialquotienten von Ω mit der wahren Anomalie verwechselt werden darf. Es ist schon im Art. 33. erwähnt worden, dafs man durch Verwandelung von v und u aus der Gröfse Tdt das Differential der vorstehenden Gleichung bekommt. Setzen wir daher

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt = \Sigma((i,i'))_s \sin(iu+i'g')\,du + \Sigma((i,i'))_c \cos(iu+i'g')\,du$$

dann ist

$$((i,i'))_s = (0,i,i')_s + (-1,i+1,i')_s + (1,i-1,i')_s$$
$$((i,i'))_c = (0,i,i')_c + (-1,i+1,i')_c + (1,i-1,i')_c$$

wo $(0,i,i')_s$, etc. die nemliche Bedeutung haben wie im Art. 52., nemlich die Entwickelungscoefficienten von Tdt sind. Wir bekommen hieraus durch die Integration

$$S+\varepsilon = \Sigma\{(i,i')\}_s \cos(iu+i'g') + \Sigma\{(i,i')\}_c \sin(iu+i'g')$$
$$+\tfrac{1}{3}b - e\xi + ((0,0))_c u$$

wo die Coefficienten $\{(i,i')\}_c$ und $\{(i,i')\}_s$ durch Multiplication der Coefficienten $((i,i'))_s$ und $((i,i'))_c$ mit den Integrationsfactoren auf die Art entstehen, die im Vorhergehenden mehrmals aus einander gesetzt worden ist, und da-

her wohl nicht wiederholt zu werden braucht. Andernseits haben wir die Gleichung

$$S+\varepsilon = \frac{d\delta z}{dt}+2w = \overline{W}+2w$$

oder wenn wir die im Vorhergehenden entwickelten Coefficienten von $\overline{W}$ und w substituiren

$$S+\varepsilon = \Sigma\left\{\{i,i'\}_c + [(i,i')]_c\right\}\cos(iu+i'g')+\Sigma\left\{\{i,i'\}_s+[(i,i')]_s\right\}\sin(iu+i'g')$$
$$+\left\{\{0,0\}_c+2[(0,0)]_c\right\}+\left\{(0,0,0)_c-\{1,-1,0\}_s\right\}u$$

Vergleicht man diesen Ausdruck für $S+\varepsilon$ mit dem vorhergehenden, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$\text{(F)} \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \{i,i'\}_c+[(i,i')]_c-\{(i,i')\}_c = 0 \\ \{i,i'\}_s+[(i,i')]_s-\{(i,i')\}_s = 0 \\ (0,0,0)_c-\{1,-1,0\}_s-((0,0))_c = 0 \end{array} \right.$$

die zur Prüfung der Richtigkeit der numerischen Rechnung dienen. Zu bemerken ist hiebei, daſs wegen der hier angenommenen Ableitung des Differentials von S aus Tdt diese Prüfung sich nur auf die Rechnungen erstreckt, die zu den Integrationen gehören, und etwa begangene Fehler in der Berechnung der Differentialquotienten der Störungsfunction hiedurch unentdeckt bleiben. Ich habe aber im §. II. gezeigt, wie man bei der Berechnung dieser Differentialquotienten sich Bedingungsgleichungen verschaffen, und dadurch sich der richtigen Ausführung dieser Rechnungen ohnehin versichern kann; und so möchte eine fernere Controle nicht nothwendig seyn. Man kann indeſs demohngeachtet sich auch durch Hülfe der Gröſse $S+\varepsilon$ eine Controle dieser Rechnungen verschaffen, wenn man das Differential derselben oder $\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$ aus den ursprünglichen Daten des Problems auf analoge Art berechnet, wie die Differentialquotienten nach x und y. Wer diese Controle anzuwenden wünscht, wird wohl nach Anleitung des im §. II. Auseinandergesetzten diese Entwickelungen selbst vornehmen können.

56.

Stellen wir die nach Art. 34. zu entwickelnden Differentiale von p_1 und q_1, wie folgt, dar

$$\frac{1}{\cos i}\,dp_1 = \Sigma ndt\,(i,i')_c \cos(iu+i'g') + \Sigma ndt\,(i,i')_s \sin(iu+i'g')$$

$$\frac{1}{\cos i}\,dq_1 = \Sigma ndt\,[i,i']_s \sin(iu+i'g') + \Sigma ndt\,[i,i']_c \cos(iu+i'g')$$

Durch Multiplication der Coefficienten dieser Ausdrücke mit den betreffenden Integrationsfactoren auf die Art, die zu Anfang dieses Paragraphen auseinandergesetzt, und im Art. 53. bei der Integration von $n\overline{W}dt$ speciell gezeigt worden ist, ergeben sich die Coefficienten der Integrale, die ich resp. mit $\{(i,i')\}_c$, $\{(i,i')\}_s$, $\{[i,i']\}_c$, $\{[i,i']\}_s$ bezeichnen will, und welche also zu $(i,i')_c$, $(i,i')_s$, etc. dieselbe Relation haben, wie im Art. 53. die Coefficienten $[i,i']_s$ und $[i,i']_c$ zu $\{i,i'\}_c$ und $\{i,i'\}_s$. Wir erhalten somit

$$\frac{1}{\cos i}\,\delta p_1 = n(0,0)_c t + \Sigma\{(i,i')\}_s \sin(iu+i'g') + \Sigma\{(i,i')\}_c \cos(iu+i'g')$$

$$\frac{1}{\cos i}\,\delta q_1 = n[0,0]_c t + \Sigma\{[i,i']\}_c \cos(iu+i'g') + \Sigma\{[i,i']\}_s \sin(iu+i'g')$$

und hieraus durch Hülfe des im Art. 31. gegebenen Ausdrucks für $r\delta s$

$$\begin{aligned}\frac{r}{a\cos i}\,\delta s = {} & en(0,0)_c t + n\sqrt{1-e^2}\,.\,[0,0]_c t\sin u - n(0,0)_c t\cos u \qquad \text{..........} \; (S)\\ & + \Sigma\Big\{\tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\big[\{[i-1,i']\}_c - \{[i+1,i']\}_c\big] + e\{(i,i')\}_s - \tfrac{1}{2}\{(i+1,i')\}_s - \tfrac{1}{2}\{(i-1,i')\}_s\Big\}\sin(iu+i'g')\\ & + \Sigma\Big\{\tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\big[\{[i+1,i']\}_s - \{[i-1,i']\}_s\big] + e\{(i,i')\}_c - \tfrac{1}{2}\{(i+1,i')\}_c - \tfrac{1}{2}\{(i-1,i')\}_c\Big\}\cos(iu+i'g')\end{aligned}$$

Die Substitution des numerischen Werthes des Cosinus der Neigung i der Kometenbahn gegen die Fundamentalebene kann man bis zu allerletzt verschieben.

57.

Um die Entwickelungen dieses Paragraphen auf unser Beispiel anzuwenden, ist vor allen Dingen erforderlich, dafs die Integrationsfactoren berechnet werden. Zu dem Ende geben uns unsere Data

v	$=$	0,11226	$\log \lambda_1$	$=$	8,6759
$2v$	$=$	0,22452	- λ_2	$=$	8,9769
$3v$	$=$	0,33678	- λ_3	$=$	9,1530
$4v$	$=$	0,44904	- λ_4	$=$	9,2780
$5v$	$=$	0,56130	- λ_5	$=$	9,3749
$6v$	$=$	0,67356	- λ_6	$=$	9,4541

wo nach Artt. 38. und 40. $v = \frac{n'}{n}$ und $\lambda_i = \frac{1}{2} e i' v$ ist. Letztere Gröfse, die a. a. O. λ ohne angehängten Index genannt wurde, habe ich hier, um die verschiedenen numerischen Werthe derselben von einander zu unterscheiden, mit einem Index versehen, der auf die Anwendung dieser Gröfse zur Berechnung der Integrationsfactoren gar keinen Einflufs hat. Da in unserm Beispiel λ nur sehr kleine Werthe hat, so wird die Berechnung der Integrationsfactoren und ihrer Verhältnisse am zweckmäfsigsten durch das im Art. 42. gegebene Verfahren ausgeführt. Es ergaben sich dadurch folgende Zahlenwerthe

i	$i' = 1$: $\log \alpha_i^1$	$\log p_i$	$\log q_i$
−4	9,4104*n*	8,0863*n*	8,0862*n*
−3	9,5397*n*	8,2155*n*	8,2154*n*
−2	9,7247*n*	8,4004*n*	8,4001*n*
−1	0,0425*n*	8,7179*n*	8,7282*n*
0	0,9477	9,6333	9,6158
1	9,9620	8,6300	8,6373
2	9,6759	8,3554	8,3556
3	9,5072	8,1829	8,1830
4	9,3861	8,0619	8,0619

i	$i' = 2$: $\log \alpha_i^2$	$\log p_i$	$\log q_i$
−5	9,3214*n*	8,2981*n*	8,2980*n*
−4	9,4237*n*	8,4003*n*	8,4002*n*
−3	9,5578*n*	8,5344*n*	8,5339*n*
−2	9,7543*n*	8,7304*n*	8,7286*n*
−1	0,09054*n*	9,0648*n*	9,0901*n*
0	0,64041	9,6402	9,6037
1	9,9273	8,8904	8,9026
2	9,6548	8,6301	8,6311
3	9,4924	8,4687	8,4689
4	9,3747	8,3513	8,3514

i	$i' = 3$: $\log \alpha_i^3$	$\log p_i$	$\log q_i$
−5	9,3322*n*	8,4848*n*	8,4846*n*
−4	9,4376*n*	8,5900*n*	8,5896*n*
−3	9,5776*n*	8,7297*n*	8,7285*n*
−2	9,7885*n*	8,9395*n*	8,9343*n*
−1	0,1463*n*	9,2920*n*	9,3394*n*
0	0,4526	9,6458	9,5873
1	9,8952	9,0295	9,0449
2	9,6355	8,7855	8,7871
3	9,4785	8,6303	8,6309
4	9,3638	8,5162	8,5164

i	$i' = 4$: $\log \alpha_i^4$	$\log p_i$	$\log q_i$
−5	9,3434*n*	8,6209*n*	8,6205*n*
−4	9,4523*n*	8,7294*n*	8,7287*n*
−3	9,5991*n*	8,8754*n*	8,8730*n*
−2	9,8297*n*	9,1036*n*	9,0913*n*
−1	0,2129*n*	9,4747*n*	9,5557*n*
0	0,3078	9,6507	9,5643
1	9,8653	9,1213	9,1382
2	9,6175	8,8908	8,8936
3	9,4652	8,7414	8,7423
4	9,3534	8,6304	8,6308

i	$i' = 5$			i	$i' = 6$		
	$\log \alpha_i^i$	$\log p_i$	$\log q_i$		$\log \alpha_i^i$	$\log p_i$	$\log q_i$
—5	9,3553*n*	8,7292*n*	8,7287*n*	—5	9,3679*n*	8,8205*n*	8,8196*n*
—4	9,4681*n*	8,8414*n*	8,8400*n*	—4	9,4854*n*	8,9369*n*	8,9347*n*
—3	9,6232*n*	8,9953*n*	8,9906*n*	—3	9,6513*n*	9,1008*n*	9,0921*n*
—2	9,8817*n*	9,2490*n*	9,2239*n*	—2	9,9535*n*	9,3939*n*	9,3431*n*
—1	0,2957*n*	9,6378*n*	9,7739*n*	—1	0,4053*n*	9,7952*n*	0,0330*n*
0	0,1768	9,6550	9,5284	0	0,0310	9,6587	9,4626
1	9,8359	9,1877	9,2043	1	9,8068	9,2384	9,2524
2	9,6005	8,9692	8,9729	2	9,5848	9,0308	9,0353
3	9,4526	8,8249	8,8261	3	9,4406	8,8910	8,8926

Gröfsere Integrationsfactoren, wie die vorstehenden, kommen bei den Saturnstörungen des Encke'schen Kometen erst für $i' = 9$ vor. Die gröfsten derselben führe ich in folgendem Täfelchen an

i	$\log \alpha_i^i$	$\log p_i$	$\log q_i$
—3	9,215	8,849	9,345*n*
—2	1,145	1,275*n*	9,678*n*
—1	1,821	0,355*n*	0,300
0	1,188	9,668	0,431
1	0,098	9,340	9,696

Für diesen Werth von i' sind aber die Glieder der Differentiale so klein, dafs keine merklichen Störungen daraus entstehen können.

58.

Multiplicirt man nun nach Vorschrift der Gleichung (1) des Art. 52. die Coefficienten des im Art. 35. gegebenen Ausdrucks von Tdt mit diesen Integrationsfactoren, so bekommt man folgenden Werth von W.

W

κ, i, i″	(κv + iu + i″g′) cos ″	(κv + iu + i″g′) sin ″
0, 0, 0	− b	
0, 0, 0	+0,0315u	
1, −1, 0	−1,067	+0,0630
0, 1, 0	+0,772	−0,061
−1, 2, 0	+0,146	+0,018
1, 0, 0	+0,0750n	+1,1544u
	+0,918	−0,043
0, 2, 0	−0,210	+0,018
−1, 3, 0	+0,006	−0,004
1, 1, 0	+0,482	−0,049
	+0,278	−0,035
0, 3, 0	+0,018	−0,002
−1, 4, 0	0,000	0,000
1, 2, 0	−0,039	+0,006
	−0,021	+0,004
0, 4, 0	−0,002	0,000
−1, 5, 0	0,000	0,000
1, 3, 0	+0,004	0,000
	+0,002	0,000
0, −4, 1	+0,001	+0,007
−1, −3, 1	−0,002	−0,015
1, −5, 1	0,000	0,000
	−0,001	−0,008
0, −3, 1	−0,010	−0,068
−1, −2, 1	+0,018	+0,142
1, −4, 1	+0,001	+0,008
	+0,009	+0,082
0, −2, 1	+0,020	+0,298
−1, −1, 1	−0,032	−0,312
1, −3, 1	+0,004	−0,041
	−0,008	−0,055
0, −1, 1	−0,008	−0,597
−1, 0, 1	−0,643	−9,160
1, −2, 1	−0,018	+0,085
	−0,669	−9,672
0, 0, 1	−0,330	−4,228
−1, 1, 1	+0,049	+0,318
1, −1, 1	+0,021	−0,091
	−0,260	−4,001
0, 1, 1	+0,024	−0,096
−1, 2, 1	−0,031	−0,148
1, 0, 1	−0,117	−0,228
	−0,124	−0,472

κ, i, i″	(κv + iu + i″g′) cos ″	(κv + iu + i″g′) sin ″
0, 2, 1	−0,002	+0,006
−1, 3, 1	+0,007	+0,020
1, 1, 1	−0,003	−0,005
	+0,002	+0,021
0, −4, 2	+0,018	−0,011
−1, −3, 2	−0,047	+0,029
1, −5, 2	−0,002	+0,001
	−0,031	+0,019
0, −3, 2	−0,258	+0,201
−1, −2, 2	+0,652	−0,529
1, −4, 2	+0,024	−0,013
	+0,418	−0,341
0, −2, 2	+1,842	−1,634
−1, −1, 2	−2,049	+1,775
1, −3, 2	−0,395	+0,345
	−0,602	+0,486
0, −1, 2	− 3,942	+ 3,574
−1, 0, 2	−23,619	+21,213
1, −2, 2	+ 1,406	− 1,267
	−26,155	+23,520
0, 0, 2	−14,484	+12,891
−1, 1, 2	+ 0,792	− 0,679
1, −1, 2	− 2,369	+ 2,128
	−16,061	+14,340
0, 1, 2	−0,287	+0,264
−1, 2, 2	−0,393	+0,339
1, 0, 2	−7,622	+6,887
	−8,302	+7,490
0, 2, 2	−0,115	+0,107
−1, 3, 2	+0,023	−0,019
1, 1, 2	−0,204	+0,174
	−0,296	+0,262
0, 3, 2	+0,007	−0,006
−1, 4, 2	−0,001	0,000
1, 2, 2	−0,040	+0,035
	−0,034	+0,029
0, −4, 3	−0,048	−0,038
−1, −3, 3	+0,132	+0,097
1, −5, 3	+0,004	+0,004
	+0,088	+0,063
0, −3, 3	+0,360	+0,281
−1, −2, 3	−0,806	−0,652
1, −4, 3	−0,081	−0,055

κ, i, i″	(κv + iu + i″g′) cos ″	(κv + iu + i″g′) sin ″
	−0,527	−0,426
0, −2, 3	−1,057	−1,146
−1, −1, 3	+1,711	+1,563
1, −3, 3	+0,305	+0,287
	+0,959	+0,704
0, −1, 3	+1,647	+2,131
−1, 0, 3	+5,736	+7,401
1, −2, 3	−0,694	−0,813
	+6,689	+8,719
0, 1, 3	+3,492	+4,699
−1, 1, 3	−0,138	−0,246
1, −1, 3	+1,006	+1,297
	+4,360	+5,750
0, 1, 3	+0,069	+0,129
−1, 2, 3	+0,160	+0,182
1, 0, 3	+1,935	+2,598
	+2,164	+2,909
0, 2, 3	+0,056	+0,068
−1, 3, 3	−0,021	−0,017
1, 1, 3	+0,060	+0,089
	+0,095	+0,140
0, 3, 3	−0,006	−0,005
−1, 4, 3	+0,002	+0,001
1, 2, 3	+0,025	+0,029
	+0,021	+0,025
0, −5, 4	+0,003	−0,010
−1, −4, 4	−0,008	+0,027
1, −6, 4	0,000	0,000
	−0,005	+0,017
0, −4, 4	−0,026	+0,080
−1, −3, 4	+0,067	−0,173
1, −5, 4	+0,004	−0,017
	+0,045	−0,110
0, −3, 4	+0,154	−0,277
−1, −2, 4	−0,364	+0,637
1, −4, 4	−0,035	+0,078
	−0,245	+0,438
0, −2, 4	−0,487	+0,642
−1, −1, 4	+0,776	−1,155
1, −3, 4	+0,133	−0,202
	+0,422	−0,715
0, −1, 4	+0,821	−0,956

$\overline{W}$

$\varkappa, i, i'$	$(\varkappa v + iu + i'g')$ cos	$(\varkappa v + iu + i'g')$ sin
	″	″
−1, 0, 4	+1,877	−2,191
1, −2, 4	−0,328	+0,408
	+2,370	−2,739
0, 0, 4	+1,222	−1,364
−1, 1, 4	−0,035	+0,018
1, −1, 4	+0,507	−0,579
	+1,694	−1,925
0, 1, 4	+0,051	−0,042
−1, 2, 4	+0,058	−0,078
1, 0, 4	+0,681	−0,775
	+0,790	−0,895
0, 2, 4	+0,023	−0,032
−1, 3, 4	−0,007	+0,013
1, 1, 4	+0,036	−0,029
	+0,052	−0,048
0, −5, 5	−0,011	−0,001
−1, −4, 5	+0,028	+0,003
1, −6, 5	+0,003	0,000
	+0,020	+0,002
0, −4, 5	+0,058	+0,014
−1, −3, 5	−0,125	−0,039
1, −5, 5	−0,018	−0,002
	−0,085	−0,027
0, −3, 5	−0,156	−0,037
−1, −2, 5	+0,382	+0,180
1, −4, 5	+0,048	+0,017
	+0,274	+0,124

$\varkappa, i, i'$	$(\varkappa v + iu + i'g')$ cos	$(\varkappa v + iu + i'g')$ sin
	″	″
0, −2, 5	+0,344	+0,211
−1, −1, 5	−0,665	−0,366
1, −3, 5	−0,109	−0,056
	−0,430	−0,211
0, −1, 5	−0,521	−0,355
−1, 0, 5	−0,852	−0,570
1, −2, 5	+0,223	+0,136
	−1,150	−0,789
0, 0, 5	−0,553	−0,384
−1, 1, 5	−0,013	−0,001
1, −1, 5	−0,327	−0,215
	−0,893	−0,600
0, 1, 5	−0,028	−0,022
−1, 2, 5	−0,034	−0,021
1, 0, 5	−0,329	−0,222
	−0,391	−0,265
0, 2, 5	−0,018	−0,008
−1, 3, 5	+0,008	+0,004
1, 1, 5	−0,017	−0,017
	−0,027	−0,021
0, −5, 6	+0,002	+0,009
−1, −4, 6	−0,004	−0,020
1, −6, 6	−0,001	−0,002
	−0,003	−0,013
0, −4, 6	0,000	−0,033
−1, −3, 6	−0,007	+0,074
1, −5, 6	+0,001	+0,009

$\varkappa, i, i'$	$(\varkappa v + iu + i'g')$ cos	$(\varkappa v + iu + i'g')$ sin
	″	″
	−0,006	+0,050
0, −3, 6	−0,018	+0,079
−1, −2, 6	+0,050	−0,212
1, −4, 6	+0,003	−0,026
	+0,035	−0,159
0, −2, 6	+0,059	−0,171
−1, −1, 6	−0,109	+0,365
1, −3, 6	−0,016	+0,054
	−0,066	+0,248
0, −1, 6	−0,101	+0,266
−1, 0, 6	−0,121	+0,325
1, −2, 6	+0,043	−0,108
	−0,179	+0,483
0, 0, 6	−0,085	+0,214
−1, 1, 6	−0,004	+0,018
1, −1, 6	−0,075	+0,160
	−0,164	+0,392
0, 1, 6	−0,006	+0,019
−1, 2, 6	−0,005	+0,013
1, 0, 6	−0,059	+0,123
	−0,070	+0,155
0, 2, 6	−0,004	+0,005
−1, 3, 6	+0,001	−0,001
1, 1, 6	−0,003	+0,011
	−0,006	+0,015

Die in jeder Abtheilung dieser Tafel vorkommende vierte Zeile ist das Aggregat aus den drei vorhergehenden, und also die Coefficienten von $\overline{W}$. Die im Art. 30. angeführten Vorschriften zur Bestimmung der Gröfsen ξ und η können erst angewandt werden, wenn alle Planeten berücksichtigt worden sind, die auf die Bewegung des Kometen Wirkung äufsern, ich habe daher hier $\eta = \xi = 0$ gemacht; b mufs jedenfalls so bestimmt werden, wie im Vorhergehenden auseinander gesetzt worden ist, nemlich so, dafs in den Störungen der mittleren Länge kein der Zeit proportionales Glied vorkommt. Ehe ich weiter gehe, werde ich als Beispiel der hier zum ersten Male gegebenen Integrationsmethode die Rechnung für die Abtheilung von W geben, welche mit sin $(-v + iu + 2g')$ multiplicirt ist. Sie steht, wie folgt

	−1,−4,2	−1,−3,2	−1,−2,2	−1,−1,2	−1,0,2	−1,1,2	−1,2,2	−1,3,2	−1,4,2
	7,699	8,477*n*	9,884	0,5234*n*	0,66839	0,4589*n*	9,914	8,964*n*	7,602
α_{-4}^{4}; α_{-3}^{3}	7,123*n*	8,035	9,638*n*	0,6139	1,30880	0,3862*n*	9,569	8,456*n*	6,977
p_{-2}; p_{-1}	—	6,765*n*	8,703	0,2542	0,1992	9,016 *n*	8,038	6,807*n*	—
p_0 ; p_1	—	—	8,343	9,145	8,829	7,485 *n*	—	—	—
p_1 ; p_2	—	—	7,233	7,775	7,298	—	—	—	—
q_{-3}; q_{-2}	—	—	8,172	9,343 *n*	0,2989*n*	9,9899*n*	8,472	7,087*n*	—
q_{-3}; q_{-2}	—	—	—	7,877	9,128	9,080	8,076	—	—
q_{-3}; q_{-2}	—	—	—	—	7,661 *n*	7,809 *n*	7,166*n*	—	—
	−0,″001	+0,″011	−0,″435	+4,″111	+20,″361	−2,″433	+0,″371	−0,″029	+0,″001
			−0, 001	+0, 050	+ 1, 795	+1, 582	−0, 104	+0, 011	−0, 001
					+ 0, 022	+0, 140	+0, 067	−0, 003	
						+0, 002	+0, 006	+0, 002	
		+0, 015	−0, 221	−2, 505	− 0, 977	+0, 030	−0, 001		
		+0, 008	+0, 134	+0, 120	+ 0, 012				
		−0, 005	−0, 006	−0, 001					
	−0, 001	+0, 029	−0, 529	+1, 775	+21, 213	−0, 679	+0, 339	−0, 019	0, 000

Die erste Zeile dieser Rechnung enthält die Indices der Argumente, und die zweite die Logarithmen der betreffenden Coefficienten von $\frac{Tdt}{du}$. Die Logarithmen der Integrationsfactoren wurden auf den untern Rand eines Streifen Papiers geschrieben, und durch Darüberhalten zu den Logarithmen der zweiten Zeile addirt; so entstanden die 7 folgenden Zeilen. Die erste derselben enthält die Logarithmen der Producte der Coefficienten mit den resp. $\alpha_i^{i'}$, aus der Abtheilung $i' = 2$, wie linker Hand angedeutet ist, wo die beiden ersten derselben angeführt sind. Die zweite, dritte und vierte dieser Zeilen entstanden durch Addition der Logarithmen von p_i aus der zunächst vorhergehenden; die fünfte entstand wieder aus der ersten, und die sechste und siebente aus der zunächst vorhergehenden durch Addition der Logarithmen von q_i. Die bei den beiden ersten Zahlen jeder Zeile angewandten Integrationsfactoren habe ich linker Hand angeführt, aus diesen ergeben sich die übrigen von selbst.

Die folgenden Zeilen enthalten nun die Zahlen, die diesen Logarithmen zukommen, jede in die gehörige Columne gestellt, und die letzte Zeile, die Summe der Columnen, giebt die Coefficienten des Integrals.

59.

Unterwirft man nun die numerischen Coefficienten des im vorhergehenden Artikel berechneten Werthes von W der im Art. 53. entwickelten Rechnung, deren Resultat in den dort mit (1), (2), (3), (4) bezeichneten Ausdrücken enthalten ist, so geht daraus der folgende Ausdruck für die Störungen der mittleren Länge oder nz hervor

$n\delta z$			$n\delta z$			$n\delta z$		
	$(iu+i'g')$			$(iu+i'g')$			$(iu+i'g')$	
i, i'	sin	cos	i, i'	sin	cos	i, i'	sin	cos
	″	″		″	″		″	″
1,0	+ 1,52	+ 0,07	0,2	+3,55	+3,72	1,4	−0,04	−0,02
1,0	+ 0,0916t	− 2,1928t	1,2	−0,74	−0,69	2,4	−0,11	−0,14
2,0	− 0,66	− 0,02	2,2	+1,42	+1,30	−4,5	+0,08	−0,03
2,0	− 0,0301t	+ 0,4630t	3,2	+0,08	+0,07	−3,5	−0,18	+0,08
3,0	+ 0,05	+ 0,01	−4,3	−0,11	+0,08	−2,5	−0,15	+0,22
−3,1	0,00	0,00	−3,3	+0,29	−0,16	−1,5	+1,34	−1,03
−2,1	− 0,16	+ 2,34	−2,3	+1,54	−2,46	0,5	+0,15	−0,18
−1,1	+ 0,59	− 8,74	−1,3	−6,81	+9,28	1,5	+0,03	−0,02
0,1	+ 0,93	− 6,77	0,3	−1,01	+1,38	2,5	+0,06	−0,04
1,1	+ 0,02	− 1,37	1,3	+0,06	−0,12	−4,6	+0,01	+0,06
2,1	+ 0,02	− 0,14	2,3	−0,35	+0,46	−3,6	−0,02	−0,12
−4,2	+ 0,05	+ 0,04	3,3	−0,02	+0,04	−2,6	−0,05	−0,01
−3,2	0,00	+ 0,03	−4,4	−0,06	−0,11	−1,6	+0,26	+0,59
−2,2	− 7,13	− 6,45	−3,4	+0,12	+0,29	0,6	+0,04	+0,08
−1,2	+25,10	+22,59	−2,4	+0,64	+0,50	1,6	+0,01	+0,03
			−1,4	−2,81	−2,98			
			−0,4	−0,40	−0,39			

Zugleich bekommt man durch die Gleichung (5) des Art. 53.

$$b = -1,''455$$

60.

Aus dem im Art. 58. erhaltenen Werthe von W bekommen wir ferner durch die im Art. 54. entwickelten Ausdrücke (A) dessen Differentialquotienten nach v, nachdem darin v in u verwandelt worden ist, wie folgt

$\left(\frac{d\overline{W}}{dv}\right)$

i, i′	(iu + i′g′) sin ″	(iu + i′g′) cos ″
0, 0		+ 0,0630
1, 0	+ 0,146	− 0,018
1, 0	− 0,0750u	+ 1,1544u
2, 0	− 0,476	− 0,045
3, 0	+ 0,039	+ 0,006
−4, 1	− 0,002	+ 0,015
−3, 1	+ 0,017	− 0,134
−2, 1	− 0,036	+ 0,271
−1, 1	− 0,625	+ 9,245
0, 1	+ 0,028	− 0,409
1, 1	+ 0,086	− 0,080
2, 1	+ 0,010	− 0,025
−4, 2	− 0,045	− 0,028
−3, 2	+ 0,628	+ 0,516
−2, 2	− 1,654	− 1,430
−1, 2	− 25,025	− 22,480
0, 2	+ 3,161	+ 2,807
1, 2	+ 7,229	+ 6,548

$\left(\frac{d\overline{W}}{dv}\right)$

i, i′	(iu + i′g′) sin ″	(iu + i′g′) cos ″
2, 2	+ 0,227	+ 0,193
3, 2	+ 0,039	+ 0,035
−4, 3	+ 0,128	− 0,093
−3, 3	− 0,725	+ 0,597
−2, 3	+ 1,406	− 1,276
−1, 3	+ 6,430	− 8,214
0, 3	− 1,144	+ 1,543
1, 3	− 1,775	+ 2,416
2, 3	− 0,081	+ 0,106
3, 3	− 0,023	+ 0,028
−5, 4	− 0,008	− 0,027
−4, 4	+ 0,063	+ 0,156
−3, 4	− 0,329	− 0.559
−2, 4	+ 0,643	+ 0,953
−1, 4	+ 2,205	+ 2,599
0, 4	− 0,542	− 0,597
1, 4	− 0,623	− 0,697
2, 4	− 0,043	− 0,042

$\left(\frac{d\overline{W}}{dv}\right)$

i, i′	(iu + i′g′) sin ″	(iu + i′g′) cos ″
−5, 5	+ 0,025	− 0,003
−4, 5	− 0,107	+ 0,037
−3, 5	+ 0,334	− 0,163
−2, 5	− 0,556	+ 0,310
−1, 5	− 1,075	+ 0,706
0, 5	+ 0,314	− 0,214
1, 5	+ 0,295	− 0,201
2, 5	+ 0,025	− 0,021
−5, 6	− 0,003	+ 0,018
−4, 6	− 0,008	− 0,065
−3, 6	+ 0,047	+ 0,186
−2, 6	− 0,093	− 0,311
−1, 6	− 0,164	− 0,433
0, 6	+ 0,071	+ 0,142
1, 6	+ 0,054	+ 0,110
2, 6	+ 0,004	+ 0,012

und hieraus durch die Formeln (B), (C), (D) des Art. 54. den folgenden Ausdruck für die Störungen des hyperbolischen Logarithmus des Radius Vectors, oder *w*.

w

i, i′	(iu + i′g′) cos	(iu + i′g′) sin
	″	
0, 0	− 0,44	
0, 0	− 0,0315u	″
1, 0	− 0,50	+ 0,05
1, 0	− 0,0375u	− 0,5772u
2, 0	− 0,12	+ 0,01
3, 0	+ 0,01	0,00
−3, 1	− 0,01	− 0,02
−2, 1	0,00	− 0,06
−1, 1	+ 0,34	+ 5,00
0, 1	+ 0,29	+ 4,03
1, 1	+ 0,05	+ 0,21
2, 1	0,00	+ 0,01
−4, 2	+ 0,01	− 0,01
−3, 2	− 0,10	+ 0,09
−2, 2	− 0,30	+ 0,29
−1, 2	+ 14,36	− 12,91

w

i, i′	(iu + i′g′) cos ″	(iu + i′g′) sin ″
0, 2	+ 14,84	− 13,28
1, 2	+ 4,13	− 3,73
2, 2	+ 0,23	− 0,21
3, 2	+ 0,01	− 0,01
−4, 3	− 0,03	− 0,02
−3, 3	+ 0,14	+ 0,11
−2, 3	− 0,10	+ 0,05
−1, 3	− 4,00	− 5,12
0, 3	− 3,84	− 5,06
1, 3	− 1,08	− 1,46
2, 3	− 0,09	− 0,12
3, 3	− 0,01	− 0,01
−4, 4	− 0,02	+ 0,03
−3, 4	+ 0,07	− 0,12
−2, 4	− 0,04	+ 0,11
−1, 4	− 1,51	+ 1,77
0, 4	− 1,41	+ 1,61

w

i, i′	(iu + i′g′) cos ″	(iu + i′g′) sin ″
1, 4	− 0,41	+ 0,46
2, 4	− 0,05	+ 0,05
−4, 5	+ 0,02	+ 0,01
−3, 5	− 0,08	− 0,04
−2, 5	+ 0,07	+ 0,03
−1, 5	+ 0,81	+ 0,54
0, 5	+ 0,71	+ 0,48
1, 5	+ 0,22	+ 0,14
2, 5	+ 0,03	+ 0,02
−4, 6	0,00	− 0,02
−3, 6	− 0,01	+ 0,04
−2, 6	+ 0,01	− 0,05
−1, 6	+ 0,14	− 0,37
0, 6	+ 0,13	− 0,29
1, 6	+ 0,04	− 0,09

Die Gleichung (E) des Art. 54. giebt

$$-0{,}''0315\,u - 0{,}''0375\,u\cos u - 0{,}''5772\,u\sin u =$$

$$-0{,}''24$$
$$-0{,}0599\,t$$
$$-0{,}''03\sin u$$
$$-0{,}0713\,t\cos u - 1{,}0965\,t\sin u$$
$$+0{,}024\cos 2u - 0{,}02\sin 2u$$

welche in den vorstehenden Ausdruck von w substituirt werden müssen, wodurch die erste Abtheilung desselben sich in folgende verwandelt

w		
	$(iu+i'g')$	
i, i'	cos	sin
	″	″
0, 0	−0,68	
0, 0	−0,0599t	
1, 0	−0,50	+0,02
1, 0	−0,0713t	−1,0965t
2, 0	+0,12	−0,01
3, 0	+0,01	0,00

61.

Zur Controle habe ich nach Anleitung des Art. 55. die Größe $S+\varepsilon$ berechnet, und wie folgt gefunden, wo die in den „Diff." überschriebenen Columnen angeführten Zahlen die Ergebnisse der Bedingungsgleichungen (F) des Art. 55. sind.

$S+\varepsilon$				
	$(iu+i'g')$			
i, i'	cos	Diff.	sin	Diff.
	″	″		
0, 0	−0,0315u	0	″	″
1, 0	−0,09	0,00	+0,05	0,00
2, 0	+0,04	0,00	−0,01	0,00
3, 0	−0,01	0,00	0,00	0,00
−3, 1	0,00	0,00	+0,04	0,00
−2, 1	−0,01	0,00	−0,15	+0,02
−1, 1	0,00	+0,01	+0,33	0,00
0, 1	+0,32	0,00	+4,03	−0,02

$S+\varepsilon$				
	$(iu+ig)$			
i, i'	cos	Diff.	sin	Diff.
	″	″	″	″
1, 1	− 0,03	−0,02	− 0,06	−0,01
2, 1	+ 0,01	0,00	+ 0,03	0,00
−4, 2	− 0,01	0,00	0,00	−0,01
−3, 2	+ 0,22	0,00	− 0,18	−0,01
−2, 2	− 1,20	+0,01	+ 1,06	0,00
−1, 2	+ 2,55	+0,01	− 2,29	+0,01
0, 2	+13,62	0,00	−12,21	0,00
1, 2	− 0,07	+0,02	+ 0,06	+0,02
2, 2	+ 0,17	−0,02	− 0,15	0,00

	$S+\varepsilon$					$S+\varepsilon$			
	$(iu+i''g')$					$(iu+i''g')$			
i, i''	cos "	Diff. "	sin "	Diff. "	i, i''	cos "	Diff. "	sin "	Diff. "
3, 2	−0.01	0,00	+0,01	0,00	2,4	−0,03	−0,01	+0,04	0,00
−4, 3	+0,04	0,00	+0.03	+0,01	−4, 5	−0,04	−0,01	−0,01	+0,01
−3, 3	−0,25	0,00	−0,21	0,00	−3, 5	+0,12	0,00	+0,05	0,00
−2, 3	+0,77	0,00	+0,79	−0,01	−2, 5	−0,28	−0,01	−0,16	0,00
−1, 3	−1,31	0,00	−1,51	0,00	−1, 5	+0,45	+0,02	+0,27	−0,01
0, 3	−3,32	0.00	−4,39	−0,02	0, 5	+0,52	+0,01	+0,34	−0,01
1, 3	0,00	0,00	0,00	+0,01	1, 5	+0,02	+0,02	+0,01	0,00
2, 3	−0,07	−0,01	−0.08	+0,01	2, 5	+0,01	+0,01	+0,01	0,00
3, 3	+0.01	0,00	+0.01	−0.01	−4, 6	0,00	0,00	+0,02	0,00
−4, 4	+0,01	+0.01	−0,05	+0,01	−3, 6	+0,01	+0,01	−0,06	+0,02
−3, 4	−0,11	−0,01	+0.20	−0,01	−2, 6	−0,04	−0,01	+0,15	0,00
−2, 4	+0,36	−0.02	−0,50	+0,01	−1, 6	+0,08	+0.02	−0,24	+0,02
−1, 4	−0,63	−0.01	+0,81	+0,01	0, 6	+0,09	+0,01	−0,19	0.00
0, 4	−1,13	0,00	+1,29	0,00	1, 6	+0,01	−0,01	−0,01	+0,01
1, 4	−0,01	−0,01	+0,01	0,00					

62.

Auf die im Art. 56. beschriebene Art ergaben sich aus den im Art. 36. gegebenen numerischen Werthen der Differentiale von p_1 und q_1 die folgenden Integrale, wobei zu bemerken ist, daſs die im Art. 31. (δp_1) und (δq_1) genannten Constanten erst berechnet werden können, wenn alle Planeten, die auf den Encke'schen Kometen merkliche Wirkung äuſsern, berücksichtigt worden sind, und daher hier, gleichwie ξ und η, gleich Null gemacht werden müssen.

	$\frac{\delta p_1}{\cos i}$		$\frac{\delta q_1}{\cos i}$			$\frac{\delta p_1}{\cos i}$		$\frac{\delta q_1}{\cos i}$	
	$(iu+i''g')$		$(iu+i''g')$			$(iu+i''g')$		$(iu+i''g')$	
i, i''	sin	cos "	cos "	sin	i, i''	sin "	cos "	cos "	sin "
0, 0	"	+0,1658t	+0,4221t	"	−3, 2	−0,011	−0,020	+0,013	−0,039
1, 0	+0,030	+0,061	+0,358	−0,157	−2, 2	+0,066	+0,093	−0,155	+0,266
2, 0	−0,041	−0,026	−0,156	+0,078	−1, 2	−0,147	−0,190	+0,375	−0,595
3, 0	+0,014	+0,005	+0,033	−0,012	0, 2	+0,057	+0,155	+3,196	−4,491
−3, 1	−0,003	−0,008	+0,007	−0,028	1, 2	−0,081	−0,108	−0,125	+0,149
−2, 1	+0,016	0,000	−0,048	+0,067	2, 2	+0,025	+0,031	+0,074	−0,092
−1, 1	−0,036	+0,036	+0,100	−0,102	3, 2	−0,005	−0,005	−0,010	+0,010
0, 1	−0,018	+0,486	+2,150	+1,116	−3, 3	+0,009	−0,010	−0,057	−0,023
1, 1	−0,026	+0,027	−0,080	−0,147	−2, 3	−0,042	+0,037	+0,218	+0,124
2, 1	+0,012	−0,016	+0,046	+0,063	−1, 3	+0,049	−0,068	−0,404	−0,261
3, 1	−0,004	+0,005	−0,010	−0,015	0, 3	−0,083	+0,022	−1,291	−1,077

i, i'	$\frac{\delta p_1}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ sin	$\frac{\delta p_1}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ cos	$\frac{\delta q_1}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ cos	$\frac{\delta q_1}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ sin	i, i'	$\frac{\delta p_1}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ sin	$\frac{\delta p_1}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ cos	$\frac{\delta q_1}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ cos	$\frac{\delta q_1}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ sin
	″	″	″	″		″	″	″	″
1,3	+0,029	−0,033	+0,031	+0,043	2,4	−0,002	−0,005	−0,007	+0,015
2,3	−0,011	+0,011	−0,036	−0,021	−3,5	−0,003	+0,001	+0,028	+0,007
−3,4	+0,004	+0,010	−0,014	+0,043	−2,5	+0,005	−0,005	−0,082	−0,028
−2,4	−0,011	−0,016	+0,052	−0,136	−1,5	−0,004	+0,004	+0,135	+0,053
−1,4	+0,019	+0,016	−0,103	+0,241	0,5	+0,012	−0,002	+0,170	+0,080
0,4	−0,009	−0,032	−0,239	+0,471	1,5	−0,002	+0,001	+0,004	−0,001
1,4	+0,007	+0,009	+0,004	−0,005					

Hieraus erhält man durch die Gleichung (S) des Art. 56. die folgenden mit dem Radius Vector multiplicirten Breitenstörungen

i, i'	$\frac{r}{a}\,\frac{\delta s}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ sin	$\frac{r}{a}\,\frac{\delta s}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ cos	i, i'	$\frac{r}{a}\,\frac{\delta s}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ sin	$\frac{r}{a}\,\frac{\delta s}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ cos	i, i'	$\frac{r}{a}\,\frac{\delta s}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ sin	$\frac{r}{a}\,\frac{\delta s}{\cos i}$ $(iu+i'g')$ cos
		″		″	″		″	″
0,0		−0,073	−3,2	0,000	+0,007	−3,4	−0,005	−0,020
0,0	″	+0,1401t	−2,2	+0,039	+0,034	−2,4	+0,001	+0,026
1,0	+0,087	+0,086	−1,2	−1,084	−1,559	−1,4	+0,105	+0,200
1,0	+0,2260t	−0,1658t	0,2	+0,296	+0,480	0,4	−0,050	−0,106
2,0	+0,030	−0,017	1,2	+0,726	+0,992	1,4	−0,050	−0,095
3,0	−0,010	−0,004	2,2	+0,035	+0,046	2,4	−0,005	−0,008
−3,1	+0,002	+0,012	3,2	+0,003	+0,005	−3,5	+0,015	−0,004
−2,1	+0,009	−0,033	−3,3	−0,029	+0,006	−2,5	−0,020	+0,005
−1,1	−0,617	+0,067	−2,3	+0,027	+0,006	−1,5	−0,079	+0,037
0,1	+0,065	+0,366	−1,3	+0,507	−0,410	0,5	+0,048	−0,019
1,1	+0,544	−0,494	0,3	−0,226	+0,152	1,5	+0,038	−0,020
2,1	+0,006	+0,004	1,3	−0,263	+0,238			
3,1	+0,003	−0,005	2,3	−0,016	+0,014			

Den numerischen Werth der großen Halbachse a habe ich in diesen Ausdruck nicht substituirt, weil es mit weniger Mühe geschehen kann, wenn diese Störungen in Tafeln gebracht werden. Aus demselben Grunde, und damit man nach Gefallen die Fundamentalebene annehmen könne, habe ich den Cosinus der Neigung der Kometenbahn gegen diese als analytisches Zeichen stehen lassen.

63.

Die Berechnung der Störungen, die von den Quadraten, Producten u. s. w. der störenden Kräfte abhängen, können durch die Ausdrücke, welche ich dafür in den „*Fundamenta nova investigationis etc.*" gegeben habe, berechnet werden, da diese von der Gröfse der Excentricitäten und Neigungen durchaus unabhängig sind. Man kann diese Ausdrücke fast unverändert anwenden; vor allen Dingen müssen die dort y, α und η genannten Gröfsen $= 0$ gesetzt werden, da hier die mit der Zeit selbst multiplicirten Glieder nicht fortgeschafft zu werden brauchen, die aufserdem etwa vorzunehmenden Modificationen liegen so nahe, dafs jeder sie ohne mein Zuthun wird vornehmen können. Ich werde sie übrigens anführen, sobald ich ein Beispiel ihrer Anwendung berechnet haben werde.

Die im Vorhergehenden berechneten Saturnstörungen des Encke'schen Kometen bieten hiefür keine Anwendung dar, da sie so klein sind, dafs das Quadrat dieser störenden Kraft keine merklichen Glieder hervorbringen kann. Das Product derselben mit der störenden Kraft des Jupiters wird vielleicht auch nichts merkliches, oder wenigstens nur in den Säcularänderungen einige sehr kleine Glieder hervorbringen. Die grofse Ungleichheit des Saturns mufs jedenfalls die gröfsten, von dem Producte der Jupiter- und Saturnmasse herrührenden periodischen Störungen geben, und diese kann man wegen der langen Periode dieser Ungleichheit mit mehr als hinreichender Genauigkeit dadurch berücksichtigen, dafs man bei den im Vorhergehenden berechneten Störungen unter g' die durch die grofse Ungleichheit des Saturns verbesserte mittlere Anomalie desselben versteht. Das Quadrat der Jupitermasse kann merkliche Glieder, sowohl in den Säcularänderungen, wie in den periodischen Störungen hervorbringen; das gröfste von diesem Quadrat abhängige Glied im Differential der Störungen der mittleren Länge ist ohngefähr 2", wie viel dieses durch die Integrationen vergröfsert wird, kann ich freilich in diesem Augenblick noch nicht mit Bestimmtheit angeben, doch ist eine 15fache Vergröfserung jedenfalls als die gröfstmögliche anzunehmen. Die von den Quadraten u. s. w. der störenden Kräfte abhängigen Glieder sind überhaupt viel kleiner, wie sie aus den durch mechanische Quadraturen ermittelten Störungen erscheinen.

§. V.

Zusammenstellung der absoluten Saturnstörungen des Encke'schen Kometen, und Vergleichung derselben mit den relativen.

64.

Um der deutlichen Uebersicht willen werde ich jetzt die im Vorhergehenden berechneten Saturnstörungen auf die einfachste Form bringen und zusammenstellen. Hierauf werde ich sie mit einigen der von Encke durch mechanische Quadraturen berechneten Störungen vergleichen. Die Form der im Vorhergehenden berechneten Störungen ist

$$s \sin(iu + i'g') + c \cos(iu + i'g')$$

wo s und c numerische Coefficienten sind. Man bringt diese auf ihre einfachste Gestalt, wenn man

$$s = k \cos K$$
$$c = k \sin K$$

oder

$$s = -k' \sin K'$$
$$c = k' \cos K'$$

setzt, die erste Transformation verwandelt die beiden angeführten Glieder in das folgende

$$k \sin(iu + i'g' + K)$$

und die zweite in das folgende

$$k' \cos(iu + i'g' + K')$$

Es versteht sich von selbst, dafs man diese Transformationen auch bei den mit der Zeit multiplicirten Gliedern anwenden kann. Zu mehrerer Deutlichkeit wiederhole ich die eingeführten Bezeichnungen. Nemlich

g' bedeutet die mittlere Anomalie des Saturns, der man die grofse Ungleichheit desselben hinzufügen kann;

u . . . die excentrische Anomalie des Kometen;

t . . . die Zeit, deren Einheit das Julianische Jahr;

$n\delta z$ . . . die Störungen der mittleren Länge des Kometen;

w . . . die correspondirenden Störungen des hyperbolischen Logarithmus des Radius Vectors des Kometen;

$r\delta s$ . . . die mit dem Radius Vector multiplicirten Störungen des Sinus der Breite desselben;

i . . . die Neigung der Kometenbahn gegen die angenommene Fundamentalebene;

a . . . die grofse Halbachse der Kometenbahn.

Unterwerfen wir nun die im Vorhergehenden berechneten, vom Saturn erzeugten Störungen des Encke'schen Kometen der obigen Transformation, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
n\delta z = \; & 1'',52 \sin(u + 2°,6) \\
& + 2,1947t \sin(u + 272° 23' 30'') \\
& + 0,066 \sin(2u + 181°,7) \\
& + 0,4640t \sin(2u + 93°42') \\
& + 0,05 \sin(3u + 11°,3) \\
& + 2,35 \sin(-2u + g' + 93°,9) \\
& + 8,76 \sin(-u + g' + 273°,9) \\
& + 6,83 \sin(g' + 277°,8) \\
& + 1,37 \sin(u + g' + 270°,8) \\
& + 0,14 \sin(2u + g' + 278°,1) \\
& + 0,06 \sin(-4u + 2g' + 38°,7) \\
& + 0,03 \sin(-3u + 2g' + 90°,0) \\
& + 9,62 \sin(-2u + 2g' + 222°,2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
+33'',77 & \sin(-u+2g'+41^\circ 59') \\
+5,14 & \sin(2g'+46^\circ,3) \\
+1,01 & \sin(u+2g'+223^\circ,0) \\
+1,92 & \sin(2u+2g'+42^\circ,5) \\
+0,11 & \sin(3u+2g'+41^\circ,2) \\
+0,14 & \sin(-4u+3g'+143^\circ,9) \\
+0,33 & \sin(-3u+3g'+331^\circ,1) \\
+2,91 & \sin(-2u+3g'+302^\circ,0) \\
+11,51 & \sin(-u+3g'+126^\circ 16') \\
+1,71 & \sin(3g'+126^\circ,2) \\
+0,13 & \sin(u+3g'+296^\circ,5) \\
+0,58 & \sin(2u+3g'+127^\circ,3) \\
+0,04 & \sin(3u+3g'+116^\circ,5) \\
+0,13 & \sin(-4u+4g'+241^\circ,4) \\
+0,31 & \sin(-3u+4g'+67^\circ,5) \\
+0,81 & \sin(-2u+4g'+38^\circ,0) \\
+4,09 & \sin(-u+4g'+226^\circ,7) \\
+0,56 & \sin(4g'+224^\circ,3) \\
+0,04 & \sin(u+4g'+206^\circ,5) \\
+0,18 & \sin(2u+4g'+231^\circ,9) \\
+0,09 & \sin(-4u+5g'+339^\circ,4) \\
+0,20 & \sin(-3u+5g'+156^\circ,0) \\
+0,27 & \sin(-2u+5g'+124^\circ,3) \\
+1,69 & \sin(-u+5g'+322^\circ,5) \\
+0,23 & \sin(5g'+309^\circ,8) \\
+0,04 & \sin(u+5g'+326^\circ,3) \\
+0,07 & \sin(2u+5g'+326^\circ,3) \\
+0,06 & \sin(-4u+6g'+80^\circ,5) \\
+0,12 & \sin(-3u+6g'+260^\circ,5) \\
+0,05 & \sin(-2u+6g'+191^\circ,4) \\
+0,64 & \sin(-u+6g'+66^\circ,2) \\
+0,09 & \sin(6g'+63^\circ,4) \\
+0,03 & \sin(u+6g'+71^\circ,5)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
w = & - 0'',68 \\
& - 0{,}0599\,t \\
& + 0{,}50 \cos(u + 182^\circ{,}3) \\
& + 1{,}0988\,t \cos(u + 93^\circ 43' 15'') \\
& + 0{,}12 \cos(2u + 4^\circ{,}8) \\
& + 0{,}06 \cos(-2u + g' + 90^\circ{,}0) \\
& + 5{,}01 \cos(-u + g' + 273^\circ{,}9) \\
& + 4{,}04 \cos(g' + 274^\circ{,}1) \\
& + 0{,}22 \cos(u + g' + 283^\circ{,}4) \\
& + 0{,}13 \cos(-3u + 2g' + 222^\circ{,}0) \\
& + 0{,}42 \cos(-2u + 2g' + 224^\circ{,}0) \\
& + 19{,}31 \cos(-u + 2g' + 41^\circ 57') \\
& + 19{,}91 \cos(2g' + 41^\circ 49') \\
& + 5{,}58 \cos(u + 2g' + 42^\circ{,}1) \\
& + 0{,}31 \cos(2u + 2g' + 42^\circ{,}4) \\
& + 0{,}04 \cos(-4u + 3g' + 146^\circ{,}3) \\
& + 0{,}18 \cos(-3u + 3g' + 321^\circ{,}9) \\
& + 0{,}11 \cos(-2u + 3g' + 206^\circ{,}0) \\
& + 6{,}50 \cos(-u + 3g' + 128^\circ{,}0) \\
& + 6{,}35 \cos(3g' + 127^\circ{,}2) \\
& + 1{,}82 \cos(u + 3g' + 126^\circ{,}5) \\
& + 0{,}15 \cos(2u + 3g' + 126^\circ{,}9) \\
& + 0{,}04 \cos(-4u + 4g' + 236^\circ{,}3) \\
& + 0{,}14 \cos(-3u + 4g' + 59^\circ{,}7) \\
& + 0{,}12 \cos(-2u + 4g' + 250^\circ{,}0) \\
& + 2{,}33 \cos(-u + 4g' + 229^\circ{,}5) \\
& + 2{,}14 \cos(4g' + 228^\circ{,}8) \\
& + 0{,}62 \cos(u + 4g' + 228^\circ{,}3) \\
& + 0{,}07 \cos(2u + 4g' + 225^\circ{,}0) \\
& + 0{,}09 \cos(-3u + 5g' + 153^\circ{,}5) \\
& + 0{,}08 \cos(-2u + 5g' + 336^\circ{,}8) \\
& + 0{,}97 \cos(-u + 5g' + 326^\circ{,}3) \\
& + 0{,}86 \cos(5g' + 326^\circ{,}0)
\end{aligned}
$$

$$+\ 0'',26 \quad \cos(\ \ u+5g'+327°,5\ )$$
$$+\ 0,04 \quad \cos(\ 2u+5g'+326°,3\ )$$
$$+\ 0,04 \quad \cos(-3u+6g'+256°,0\ )$$
$$+\ 0,05 \quad \cos(-2u+6g'+\ \ 78°,7\ )$$
$$+\ 0,40 \quad \cos(-\ u+6g'+\ \ 69°,3\ )$$
$$+\ 0,32 \quad \cos(\qquad 6g'+\ \ 65°,9\ )$$
$$+\ 0,10 \quad \cos(\ \ u+6g'+\ \ 66°,0\ )$$

$$\frac{r\delta s}{a\cos i} = -\ 0'',73$$
$$+\ 0,1401t$$
$$+\ 0,123 \quad \sin(u+44°,7)$$
$$+\ 0,2803t \quad \sin(u+323°44')$$
$$+\ 0,034 \quad \sin(2u+330°,5)$$
$$+\ 0,011 \quad \sin(3u+201°,8)$$
$$+\ 0,012 \quad \sin(-3u+\ g'+\ \ 80°,5\ )$$
$$+\ 0,034 \quad \sin(-2u+\ g'+285°,2\ )$$
$$+\ 0,620 \quad \sin(-\ u+\ g'+173°,8\ )$$
$$+\ 0,372 \quad \sin(\qquad g'+\ \ 79°,9\ )$$
$$+\ 0,735 \quad \sin(\ \ u+\ g'+317°,7\ )$$
$$+\ 0,007 \quad \sin(\ 2u+\ g'+\ \ 33°,7\ )$$
$$+\ 0,007 \quad \sin(-3u+2g'+\ \ 90°,0\ )$$
$$+\ 0,052 \quad \sin(-2u+2g'+\ \ 41°,0\ )$$
$$+\ 1,899 \quad \sin(-\ u+2g'+235°11')$$
$$+\ 0,564 \quad \sin(\qquad 2g'+\ \ 58°,3\ )$$
$$+\ 1,230 \quad \sin(\ \ u+2g'+\ \ 53°48')$$
$$+\ 0,058 \quad \sin(\ 2u+2g'+\ \ 52°,7\ )$$
$$+\ 0,030 \quad \sin(-3u+3g'+168°,3\ )$$
$$+\ 0,028 \quad \sin(-2u+3g'+\ \ 12°,6\ )$$
$$+\ 0,651 \quad \sin(-\ u+3g'+321°,0\ )$$
$$+\ 0,272 \quad \sin(\qquad 3g'+146°,1\ )$$
$$+\ 0,355 \quad \sin(\ \ u+3g'+137°,9\ )$$
$$+\ 0,021 \quad \sin(\ 2u+3g'+138°,8\ )$$
$$+\ 0,021 \quad \sin(-3u+4g'+256°,0\ )$$
$$+\ 0,026 \quad \sin(-2u+4g'+\ \ 87°,8\ )$$

$$+\ 0'',226 \quad \sin(-\ u+4g'+\ 62^\circ,3\ )$$
$$+\ 0,117 \quad \sin(\ 4g'+244^\circ,7\ )$$
$$+\ 0,108 \quad \sin(\ u+4g'+242^\circ,3\ )$$
$$+\ 0,016 \quad \sin(-3u+5g'+345^\circ,1\ )$$
$$+\ 0,021 \quad \sin(-2u+5g'+166^\circ,0\ )$$
$$+\ 0,087 \quad \sin(-\ u+5g'+155^\circ,0\ )$$
$$+\ 0,052 \quad \sin(\ 5g'+338^\circ,4\ )$$
$$+\ 0,043 \quad \sin(\ u+5g'+332^\circ,1\ ) \quad ,$$

Dieses ist das Resultat, welches ich für die Störungen des Encke'schen Kometen durch den Saturn erlangt habe, und das erste seiner Gattung *).

65.

Zählt man die Glieder der vorstehenden Ausdrücke, so findet man in den Längenstörungen 46, in den Störungen des Log. des Radius Vectors 40, und in den Breitenstörungen 34. Unter den Coefficienten der Längenstörungen sind, wenn man die mit der Zeit selbst multiplicirten Glieder — die sogenannten Säcularänderungen — nicht mitzählt, nur 14 Argumente, deren Coefficienten gröfser wie Eine Secunde sind, 17, deren Coefficienten zwischen Einer Secunde und Einer Zehntelsecunde liegen, also 13, deren Coefficienten kleiner wie eine Zehntelsecunde sind. In den Störungen des Log. des Radius Vectors findet sehr nahe das nemliche Verhältnifs statt, und in den Breitenstörungen sind alle Coefficienten bis auf zwei derselben kleiner wie eine Secunde. Die Störungen der Länge sowohl, wie die des Log. des Radius und der Breite können jede in zwei Tafeln gebracht werden. Die eine dieser Tafeln enthält die mit der Zeit selbst multiplicirten Glieder, und bekommt zum Argument die mittlere Anomalie des Kometen. Die zweite Tafel enthält alle rein periodischen Glieder, und bekommt zwei Argumente, nemlich die mittlere Anomalie des Kometen und die des Saturns. Für die Berechnung dieser Tafeln mufs man erst die, einer Reihe von gleichförmig

*) Zur Ergänzung dieses Resultats gehört noch die Entwickelung der Glieder, die von $9g'$ abhängen, und zufolge des Art. 57. grofse Integrationsfactoren bekommen. Wenn gleich die annähernde Rechnung, die ich in Bezug darauf ausgeführt habe, nichts merkliches gegeben hat, so könnte doch der Fall seyn, dafs eine genaue Rechnung für den Coefficienten des Arguments $-u+9g'$, welches eine lange Periode hat, ein paar Secunden gäbe.

fortschreitenden Werthen der mittleren Anomalie des Kometen zukommenden Werthe der excentrischen Anomalie rechnen, und diese nach und nach nebst den gleichförmig fortschreitenden Werthen der mittleren Anomalie des Saturns in die obigen Ausdrücke substituiren. In Bezug auf den Saturn müssen die Tafeln zwar durch den ganzen Umkreis ausgedehnt werden, in Bezug auf den Kometen ist dieses aber nicht nöthig, da wir ihn nicht während seines ganzen Umlaufes beobachten können, und es im Allgemeinen kein Interesse für uns haben kann, seinen Ort für die Punkte seiner Bahn zu berechnen, in welchen er für uns unsichtbar ist. In Bezug auf den Kometen brauchen also die Tafeln nur bis zu den Graden der mittleren Anomalie vor und nach dem Perihel berechnet zu werden, wo er aufhört uns sichtbar zu seyn.

Eine andere Art die obigen Störungen in Tafeln zu bringen, ist die von Gaufs in der monatlichen Correspondenz publicirte. Nach diesem Verfahren, welches auch auf die hier den Störungen gegebene Form anwendbar ist, können alle Glieder, die von einem und demselben Vielfachen, entweder der mittleren Anomalie des Saturns oder der excentrischen des Kometen abhängen, in zwei Tafeln mit einfachem Argumente gebracht werden; dieses Argument ist im ersteren Falle die mittlere Anomalie des Kometen, im andern die des Saturns. Die auf diese Art in je zwei zusammengehörige Tafeln gebrachten Störungen werden auf folgende Form gebracht.

$$a \sin(A + i'g')$$
$$\text{oder resp. } a' \sin(A' + iu)$$

Die beiden Tafeln geben a und A, oder resp. a' und A', die Multiplication dieser Coefficienten mit dem Sinus des dazu gehörigen Bogens mufs bei der Anwendung der Tafeln zur Berechnung der Oerter des Kometen ausgeführt werden.

66.

Die interessanteste Anwendung, die hier von den obigen Ausdrücken gemacht werden kann, ist unstreitig ihre Vergleichung mit den von Encke durch mechanische Quadraturen berechneten Störungen. In den Astr. Nachr. IX. Bd. No. 211 hat Encke die Störungen, die der nach ihm benannte Komet während der drei Perioden von 1819 bis 1829 erlitt, bekannt gemacht, und dabei die Störungen, welche jeder Planet verursachte, angegeben.

Diese Resultate können uns daher hier zur Vergleichung dienen. A. a. O. habe ich folgende Angaben der vom Saturn erzeugten Störungen entlehnt:

	Δi	$\Delta\Omega$	$\Delta\varphi$	$\Delta\pi$	$\Delta\mu$	ΔM
1819 Jan. 27,25 — 1822 Mai 24,0	—15",141	— 7",965	—25",752	+4",471	—0",041944	— 68",019
1819 Jan. 27,25 — 1825 Sept. 16,3	—15 ,985	—10 ,298	—27 ,527	—2 ,188	—0 ,046068	— 79 ,219
1819 Jan. 27,25 — 1829 Jan. 9,72	—10 ,903	—10 ,735	—14 ,950	—2 ,071	—0 ,023442	—124 ,340

Die Zeiten, für welche diese Störungen gelten, sind so nahe die Durchgangszeiten durch's Perihel, daſs wir sie bei der Vergleichung unbedenklich für diese selbst annehmen können. Es bedeuten hier

Δi die Störungen der Neigung gegen die Ecliptik;
$\Delta\Omega$ - - der Knotenlänge;
$\Delta\varphi$ - - des Excentricitätswinkels;
$\Delta\pi$ - - der Länge des Perihels;
$\Delta\mu$ - - der mittleren täglichen Bewegung;
ΔM - - der Epoche der mittleren Anomalie.

Man findet nun leicht, daſs während der Durchgangszeit durch's Perihel die Störungen der mittleren Länge, die des hyperbolischen Logarithmus des Radius Vectors (wie oben in Secunden ausgedrückt) und die der Breite mit den obigen Encke'schen Störungen durch folgende Ausdrücke verbunden sind:

$$n\delta z = \Delta M + \frac{(1-e)^2}{\sqrt{1-e^2}}\Delta\pi - 2\sin^2\tfrac{1}{2}i\,\frac{(1-e)^2}{\sqrt{1-e^2}}\Delta\Omega$$

$$w = -\tfrac{2}{3}\frac{\Delta\mu}{\mu}R - \Delta\varphi\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$\frac{\delta s}{\cos i} = \sin\omega\,\Delta i - \sin i\cos\omega\,\Delta\Omega$$

wo e die Excentricität, ω die Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten, i die Neigung gegen die Ecliptik bedeuten, und $R = 206265''$ ist. Durch Hülfe der numerischen Werthe

$$\omega = 182^\circ 49'$$
$$e = 0{,}8447$$
$$i = 13^\circ 21'$$
$$\mu = 1077''$$

verwandeln sich diese Ausdrücke in folgende

$$n\delta z = \Delta M + 0{,}0448\,\Delta\pi - 0{,}0012\,\Delta\Omega$$
$$w = -127{,}6\,\Delta\mu - 3{,}448\,\Delta\varphi$$
$$\frac{\delta s}{\cos i} = -0{,}0491\,\Delta i + 0{,}2306\,\Delta\Omega$$

und somit bekommt man für die obigen drei Perioden

$$n\delta z = -\ 67'',81,\quad w = +\ 94'',11,\quad \frac{\delta s}{\cos i} = -1'',09$$
$$-\ 79,30,\quad = +100,78,\quad = -1,59$$
$$-124,42,\quad = +\ 54,54,\quad = -1,94$$

Bei der Vergleichung dieser Werthe von $n\delta z$ mit denen, welche die absoluten Störungen geben, muſs das der Zeit proportionale Glied berücksichtigt werden, welches, wie in der Einleitung pag. 5. angeführt, sich bei der doppelten Integration durch mechanische Quadraturen in ΔM erzeugt haben kann. Nennen wir den Betrag dieses Gliedes während einer Periode des Kometen x, und erwägen wir, daſs die obigen drei Perioden einander so nahe gleich sind, daſs wir sie für diesen Zweck einander völlig gleich setzen können, so bekommen wir statt der vorhergehenden Werthe von $n\delta z$ die folgenden

$$n\delta z = -\ 67'',81 - x$$
$$= -\ 79,30 - 2x$$
$$= -124,42 - 3x$$

welche bei der Vergleichung anzuwenden sind.

67.

Während des Durchganges durch's Perihel haben wir $u = o$, substituiren wir diesen Werth in die allgemeinen Ausdrücke der absoluten Störungen, die in den Artt. 59., 60. und 62. gegeben sind, so bekommen wir für die Durchgangszeiten durch's Perihel überhaupt:

$$\begin{aligned} n\delta z = +0'',06 - 1'',7298t &+ 1'',40 \sin g' - 14'',68 \cos g' \\ &+ 22,33 \sin 2g' + 20,61 \cos 2g' \\ &- 6,41 \sin 3g' + 8,50 \cos 3g' \\ &- 2,66 \sin 4g' - 2,85 \cos 4g' \\ &+ 1,33 \sin 5g' - 1,00 \cos 5g' \\ &+ 0,25 \sin 6g' + 0,63 \cos 6g' \end{aligned}$$

$$w = -1'',05 - 0'',1312t + 0'',67\cos g' + 9'',17\sin g'$$
$$+33,18\cos 2g' - 29,77\sin 2g'$$
$$-\ 9,01\cos 3g' - 11,63\sin 3g'$$
$$-\ 3,37\cos 4g' + 3,91\sin 4g'$$
$$+\ 1,78\cos 5g' + 1,18\sin 5g'$$
$$+\ 0,31\cos 6g' - 0,78\sin 6g'$$

$$\frac{\delta s}{\cos i} = -0'',040 - 0'',1658t + 0'',059\sin g' - 0'',530\cos g'$$
$$+0,096\sin 2g' + 0,044\cos 2g'$$
$$+0,049\sin 3g' + 0,041\cos 3g'$$
$$-0,008\sin 4g' + 0,018\cos 4g'$$
$$-0,008\sin 5g' + 0,001\cos 5g'$$

Für die oben bei den Encke'schen Störungen angeführten vier Zeiten, die sich auf den Pariser Meridian beziehen, erhielt ich aus Bouvard's Saturntafeln

$$g' = 266°\ 8'$$
$$= 306\ 42$$
$$= 347\ 13$$
$$= 27\ 44$$

und die Substitution dieser Werthe in die vorstehenden Ausdrücke ergab, indem für den ersten der vier Zeitpunkte $t = 0$ gesetzt wurde, die folgenden absoluten Störungen

$$n\delta z = -25'',77,\quad w = -66'',89,\quad \frac{\delta s}{\cos i} = -0'',01$$
$$= -45,70,\quad = +28,92,\quad -1,14$$
$$= -\ 7,90,\quad = +35,02,\quad -1,64$$
$$= -\ 5,16,\quad = -12,02,\quad -1,99$$

Ziehen wir den ersten dieser Werthe von allen drei folgenden ab, so bekommen wir für die drei nach Encke angeführten Perioden die folgenden relativen Störungen

$$n\delta z = -19'',93,\quad w = +\ 95'',81,\quad \frac{\delta s}{\cos i} = -1'',13$$
$$= +17,87,\quad = +101,91,\quad = -1,63$$
$$= +20,61,\quad = +\ 54,87,\quad = -1,98$$

Diese Werthe von w und $\frac{\delta s}{\cos i}$ können wir unmittelbar mit den obigen aus

Encke's Rechnungen abgeleiteten vergleichen; ziehen wir diese von den vorstehenden ab, so ergeben sich folgende Unterschiede

im hyp. Log. des Radius Vectors	in der Breite über der Ebene der Bahn
− 1″,70 ;	+ 0″,04
− 1 ,13 ;	+ 0 ,04
− 0 ,33 ;	+ 0 ,04

Diese Unterschiede in den Störungen der Breite geben sich ohne Weiteres als sehr geringe zu erkennen; um ein sicheres Urtheil über jene zu fällen, will ich sie auf die gebräuchliche Einheit der Entfernungen von der Sonne hinführen. Dividiren wir diese in Secunden ausgedrückten Unterschiede des hyperbolischen Logarithmus des Radius Vectors des Kometen mit der Anzahl von Secunden, die dem Kreisradius gleichkommt (mit 206265″), dann erhalten wir sie in abstracter Zahl ausgedrückt, multipliciren wir diese mit dem Modul der **Brigg'schen** Logarithmen (log = 9,638 . . .), dann ergeben sich die Unterschiede dieser, und multipliciren wir wiederum diese mit dem Werthe des Radius Vectors des Kometen im Perihel (= 0,3447), dann erhalten wir, in Einheiten der Entfernung der Erde von der Sonne ausgedrückt, die folgenden Unterschiede

im Radius Vector
− 0,0000012
− 0,0000008
− 0,0000002

welche sich gleichfalls als sehr klein zeigen.

Zur Vergleichung der Werthe von $n\delta z$ erhalten wir durch Gleichstellung der aus den beiderseitigen Rechnungen gefundenen Werthe

$$\begin{aligned} -19'',93 &= -\ 67'',81 - x \\ +17,87 &= -\ 79,30 - 2x \\ +20,61 &= -124,42 - 3x \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x &= -\ 47'',88 \\ 2x &= -\ 97,17 \\ 3x &= -145,03 \end{aligned}$$

Suchen wir hieraus den Werth der unbekannten Gröſse x, der diesen Gleichungen am besten gnügt, so erhalten wir

$$x = -48'',347$$

und durch die Substitution dieses Werthes die folgenden zwischen Encke's und meinen Längenstörungen stattfindenden Unterschiede

$$\begin{array}{r} -0'',47 \\ +0,48 \\ -0,01 \end{array}$$

Diese sowohl wie die oben in den Störungen des Logarithmus des Radius Vectors und denen der Breite sich ergebenden Unterschiede sind kleiner, wie man bei so verschiedenartig berechneten Resultaten, wie die vorliegenden sind, erwarten durfte.

Zugleich sieht man aus dieser Vergleichung, daſs das in den durch mechanische Quadraturen berechneten Störungen der Epoche sich erzeugende, der Zeit proportionale Glied in kurzer Zeit beträchtlich gröſser werden kann, wie die in der That stattfindenden Längenstörungen. Denn es wurde eben der Betrag dieses Gliedes für jeden Umlauf des Kometen $= 48'',3$ gefunden, während die gröſsten in diesen Perioden in der That stattfindenden absoluten Längenstörungen nur $45'',7$ betragen.

68.

Aus der Gleichung (C) des Art. 31. geht hervor, daſs die vorstehend abgeleiteten Breitenstörungen für die Durchgangszeiten durch's Perihel nichts weiter sind, wie die mit umgekehrten Zeichen genommenen Störungen δp_1. Die Störungen δq_1 sind also im Vorhergehenden, weil sie im Perihel in den Breitenstörungen verschwinden, nicht mit Encke's Rechnungen verglichen worden. Die Vergleichung derselben will ich hier noch anführen. Es ergiebt sich zu dem Ende, wenn man in dem numerischen Ausdrucke des Art. 62. von $\frac{\delta q_1}{\cos i}$ die excentrische Anomalie $u = 0$ macht, für die Durchgangszeiten durch's Perihel

$$\frac{\delta q_1}{\cos i} = +0'',235 + 0'',4221t + 2'',165 \cos g' + 0'',954 \sin g'$$
$$+ 3,368 \cos 2g' - 4,792 \sin 2g'$$
$$- 1,539 \cos 3g' - 1,215 \sin 3g'$$
$$- 0,307 \cos 4g' + 0,629 \sin 4g'$$
$$+ 0,255 \cos 5g' + 0,111 \sin 5g'$$

und wenn man hierin die im vorhergehenden Artikel angeführten 4 Werthe von g' substituirt, für die dort angeführten 4 Zeitpunkte

$$\frac{\delta q_1}{\cos i} = -7'',00$$
$$= +8,35$$
$$= +8,92$$
$$= +3,95$$

Hieraus durch Subtraction des ersten Werthes für die Perioden

$$1819-1822, \quad \frac{\delta q_1}{\cos i} = +15'',35$$
$$1819-1825, \quad = +15,92$$
$$1819-1829, \quad = +10,95$$

Die Formel, die zur Vergleichung mit Encke's Störungen dient, ist

$$\frac{\delta q_1}{\cos i} = \cos \omega \, \Delta i + \sin i \sin \omega \, \Delta \Omega$$

und giebt durch die Substitution der a. a. O. angeführten Encke'schen Störungen für dieselben Perioden

$$\frac{\delta q_1}{\cos i} = +15'',21$$
$$= +16,09$$
$$= +11,01$$

Die Unterschiede mit meinem Resultate sind also

$$+0'',14$$
$$-0,17$$
$$-0,06$$

ebenfalls sehr klein, und innerhalb der Grenzen annehmbarer Unterschiede.

§. VI.

Entwickelung der Störungen, die durch die Reaction des Planeten auf die Sonne entstehen.

69.

Die Störungen des Kometen, welche von der Reaction des Planeten entstehen, und in der Störungsfunction durch das Glied

$$-\frac{m'}{M+m}\,\frac{r}{r'^2}\,H$$

ausgedrückt sind, heben sich in dem Falle, den wir bisher betrachtet haben, gegen das erste Glied der Entwickelung der directen Störungen auf, wie im §. I. gezeigt worden ist. Im zweiten Falle, den ich im zweiten Theil vornehmen werde, vereinigt sich, wie ich dort zeigen werde, dieses Glied mit den beiden ersten Gliedern der Entwickelung der directen Störungen dermaſsen, daſs diese drei Glieder zusammengenommen durch endliche Ausdrücke integrabel sind.

Wenngleich deshalb in diesen beiden Fällen die abgesonderte Entwickelung der Störungen, die durch die Reaction des Planeten auf die Sonne entstehen, überflüssig ist, so kann doch im dritten Falle (Art. 2.) sich ereignen, daſs man sie mit Vortheil abgesondert entwickeln kann, und ich habe deshalb nicht unterlassen können, ihre Entwickelung hier zu geben. Diese ist überdieſs, wenn man die im Vorhergehenden entwickelten Grundsätze in Anwendung bringt, so einfach, daſs es schon um dieser Ursache willen interessant ist, sie kennen zu lernen.

70.

Nennen wir den Theil der Störungsfunction, welcher durch die Reaction des Planeten auf die Sonne entsteht, Ω°, so haben wir nach dem Vorhergehenden

$$\Omega^{\circ} = -\frac{m'}{M+m}\frac{r}{r'^2}H$$

Im Art. 8. wurde

$$H = A\cos f + B\sin f$$

gesetzt, welcher Ausdruck, wenn wir die oben angewandten Coordinaten

$$x = \frac{r}{a}\cos f$$
$$y = \frac{r}{a}\sin f$$

einführen, in folgenden übergeht

$$H = A\frac{a}{r}x + B\frac{a}{r}y$$

Wir erhalten somit

$$\Omega^{\circ} = -\frac{m'}{M+m}\frac{a}{r'^2}Ax - \frac{m'}{M+m}\frac{a}{r'^2}By$$

und hieraus durch die Differentiation

$$\left(\frac{d\Omega^{\circ}}{dx}\right) = -\frac{m'}{M+m}\frac{a}{r'^2}A$$
$$\left(\frac{d\Omega^{\circ}}{dy}\right) = -\frac{m'}{M+m}\frac{a}{r'^2}B$$

woraus sich ergiebt, daſs diese Differentialquotienten von den Coordinaten des Kometen unabhängig sind. Die Gröſsen A und B haben zufolge des Art. 8. folgende Form

$$A = \cos^2\tfrac{1}{2}I\cos(f'-2K) + \sin^2\tfrac{1}{2}I\cos(f'+2N)$$
$$B = \cos^2\tfrac{1}{2}I\sin(f'-2K) - \sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(f'+2N)$$

Setzen wir nun

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f' = \Sigma_{-\infty}^{+\infty}\alpha_i\cos ig'\,;\quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2\sin f' = \Sigma_{-\infty}^{+\infty}\beta_i\sin ig'$$

und stellen die Bedingungsgleichungen

$$\alpha_i = \alpha_{-i}\,;\ \beta_i = -\beta_{-i}$$

auf, so erhalten wir

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 A = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha_i + \beta_i\} \cos(ig' - 2K) + \sin^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha_i + \beta_i\} \cos(ig' + 2N)$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 B = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha_i + \beta_i\} \sin(ig' - 2K) - \sin^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha_i + \beta_i\} \sin(ig' + 2N)$$

Sey ferner

$$R_i = -\frac{m'}{M+m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \{\alpha_i + \beta_i\}$$

dann ergiebt sich

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega^0}{dx}\right) = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \cos(ig' - 2K) + \sin^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \cos(ig' + 2N)$$

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega^0}{dy}\right) = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(ig' - 2K) - \sin^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(ig' + 2N)$$

wo ich die Bezeichnung der Grenzen der Summen, die dieselben sind wie vorher, der Kürze wegen weggelassen habe. Substituiren wir nun diese Ausdrücke der Differentialquotienten der Störungsfunction in dem zu Ende des Art. 29. gegebenen Ausdruck für Tdt, und setzen

$$e = \sin\varphi$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\frac{Tdt}{du} = \; & \tfrac{1}{2} \sin\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(-2u + ig' - 2K) \\
& - \sin\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(-v - u + ig' - 2K) \\
& - \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi (1 + 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi) \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(-u + ig' - 2K) \\
& + 3\cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(-v + ig' - 2K) \\
& + \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(v - 2u + ig' - 2K) \\
& + \tfrac{3}{2} \sin\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(ig' - 2K) \\
& - \sin\varphi (1 + \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi) \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(-v + u + ig' - 2K) \\
& - \sin\varphi (1 + \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi) \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(v - u + ig' - 2K) \\
& - \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi (1 + 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi) \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(u + ig' - 2K) \\
& + \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(-v + 2u + ig' - 2K) \\
& + 3\sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(v + ig' - 2K) \\
& + \tfrac{1}{2} \sin\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(2u + ig' - 2K) \\
& - \sin\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2} I \Sigma R_i \sin(v + u + ig' - 2K)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(-2u+ig'+2N)\\
&+\ \sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(-v-u+ig'+2N)\\
&+\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi(1+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi)\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(-u+ig'+2N)\\
&-3\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(-v+ig'+2N)\\
&-\ \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(v-2u+ig'+2N)\\
&-\tfrac{3}{2}\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(ig'+2N)\\
&+\ \sin\varphi(1+\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi)\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(-v+u+ig'+2N)\\
&+\ \sin\varphi(1+\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(v-u+ig'+2N)\\
&+\ \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi(1+2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(u+ig'+2N)\\
&-\ \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(-v+2u+ig'-2N)\\
&-3\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(v+ig'+2N)\\
&-\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(2u+ig'+2N)\\
&+\ \sin\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(v+u+ig'+2N)
\end{aligned}
$$

Man sieht, daſs die zweite Hälfte der Glieder dieses Ausdrucks sich durch Multiplication mit $\text{tg}^2\,\tfrac{1}{2}I$, Umwechselung des algebraischen Zeichens, und der Verwandelung von $-K$ in N, $-v$ in v, und $-u$ in u aus der ersten Hälfte ergiebt. Die Multiplication mit $\text{tg}^2\,\tfrac{1}{2}I$ ist also die alleinige Rechnung, die die zweite Hälfte erfordert, wenn die erste berechnet ist. Die Integration wird durch die im §. IV. gegebenen Regeln ausgeführt. Am Ende der Rechnung können je zwei Glieder, die sich in ihren Argumenten blos durch $-2K$ und $2N$ unterscheiden, auf bekannte Art in Ein Glied zusammengezogen werden.

71.

Der im vorhergehenden Artikel angeführte Ausdruck für Ω^0 giebt

$$\left(\frac{d\Omega^0}{dH}\right) = -\frac{m'}{M+m}\frac{r}{r'^2}$$

Hiermit ergiebt sich aus dem Art. 20.

$$\left(\frac{d\Omega^0}{dz}\right) = -\frac{m'}{M+m}\frac{a}{r'^2}\sin I\sin(f'+N-K)$$

welcher Ausdruck, sowie die Ausdrücke der beiden andern Differentialquotienten von Ω^0, von den Coordinaten des Kometen unabhängig ist. Wenn wir die im vorigen Art. eingeführten Coefficienten α_i und β_i auch hier anwenden, so erhalten wir

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \sin(f'+N-K) = \Sigma\{\alpha_i+\beta_i\} \sin(ig'+N-K)$$

wo die Grenzen der Summe wie oben $-\infty$ und $+\infty$ sind. Setzen wir nun

$$M_i = -\frac{m'}{M+m}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 \{\alpha_i+\beta_i\} \sin I$$

so erfolgt

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega^0}{ds}\right) = \Sigma M_i \sin(ig'+N-K)$$

Wir erhalten somit durch die Ausdrücke (B) des Art. 31.

$$\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dp_1}{dt} = -\tfrac{1}{2}\cos\varphi\Sigma M_i\cos(-u+ig'+N-K)$$
$$+\tfrac{1}{2}\cos\varphi\Sigma M_i\cos(\;\;u+ig'+N-K)$$

$$\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dq_1}{dt} = -\tfrac{1}{2}\Sigma M_i\sin(-u+ig'+N-K)$$
$$+\sin\varphi\Sigma M_i\sin(\;\;ig'+N-K)$$
$$-\tfrac{1}{2}\Sigma M_i\sin(u+ig'+N-K)$$

wo zu bemerken ist, daſs linker Hand unter dem Cosinuszeichen i kein Index ist, sondern die Neigung der Kometenbahn gegen die Fundamentalebene bedeutet.

Die vorstehenden Ausdrücke werden ebenfalls durch die Regeln des §. IV. integrirt, und hierauf aus den Integralen derselben durch den Ausdruck (S) des Art. 56. die Breitenstörungen berechnet, in welchen aber im gegenwärtigen Falle nur das mit $\sin(iu+i'g')$ multiplicirte Glied, welches unter dem Sinuszeichen sich in $\sin(iu+i'g'+N-K)$ verwandelt, in Betracht kommt.

72.

Die im Vorhergehenden eingeführten Coefficienten α_i und β_i können auf mehrere Arten berechnet werden. Eine derselben ist folgende. Wenn man die Gleichungen

$$\frac{dr}{dg} = \frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}};\quad \frac{dr}{de} = -a\cos f$$

in Bezug auf g differentiirt, so ergiebt sich, da $\frac{df}{dg} = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}$ ist,

$$\frac{d^2r}{dg^2} = ae\cos f\frac{a^2}{r^2};\quad \frac{d^2r}{de\,dg} = a\sin f\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}$$

also

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos f = \frac{1}{ae}\frac{d^2r}{dg^2};\quad \left(\frac{a}{r}\right)^2\sin f = \frac{1}{a\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{d^2r}{de\,dg}$$

Die bekannte Entwickelung des Radius Vectors ist

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \left(e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5 - \text{etc.}\right)\cos g - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \frac{1}{16}e^6 - \text{etc.}\right)\cos 2g$$
$$- \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5 + \text{etc.}\right)\cos 3g - \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{2}{5}e^6 + \text{etc.}\right)\cos 4g$$
$$- \left(\frac{125}{384}e^5 - \text{etc.}\right)\cos 5g - \left(\frac{27}{80}e^6 - \text{etc.}\right)\cos 6g - \text{etc.}$$

und somit ergiebt sich, in Folge der beiden vorstehenden Gleichungen, durch die Differentiirung dieses Ausdruckes

$$\alpha_0 = 0$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{16}e^2 + \frac{5}{384}e^4 - \text{etc.}$$
$$\alpha_2 = e - \frac{2}{3}e^3 + \frac{1}{8}e^5 - \text{etc.}$$
$$\alpha_3 = \frac{27}{16}e^2 - \frac{405}{256}e^4 + \text{etc.}$$
$$\alpha_4 = \frac{8}{3}e^3 - \frac{16}{5}e^5 + \text{etc.}$$
$$\alpha_5 = \frac{3125}{768}e^4 - \text{etc.}$$
$$\alpha_6 = \frac{243}{40}e^5 - \text{etc.}$$
etc.

$$\beta_0 = 0$$
$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{16}e^2 - \frac{11}{384}e^4 + \text{etc.}$$
$$\beta_2 = e - \frac{5}{6}e^3 + \frac{1}{12}e^5 - \text{etc.}$$
$$\beta_3 = \frac{27}{16}e^2 - \frac{459}{256}e^4 + \text{etc.}$$
$$\beta_4 = \frac{8}{3}e^3 - \frac{52}{15}e^5 + \text{etc.}$$
$$\beta_5 = \frac{3125}{768}e^4 - \text{etc.}$$
$$\beta_6 = \frac{243}{40}e^5 - \text{etc.}$$
etc.

Ich bemerke zum Ueberfluſs, daſs die Excentricität des Planeten in diesen Ausdrücken angewandt werden muſs, und ich nur zur Abkürzung e statt e' darin geschrieben habe.

§. VII.

Tafeln für die Transcendenten I_λ^i.

Zur Berechnung der folgenden ersten Tafel sind die Reihen des §. IV. und das Taylor'sche Theorem benutzt worden. Für die erste Hälfte der Tafel bediente ich mich der nach aufsteigenden, und für die zweite Hälfte der nach absteigenden Potenzen von λ fortschreitenden Reihen. Hiemit wurden aber nicht alle Transcendenten berechnet, sondern mit Ausnahme des letzten Theils der Tafel nur die, für welche λ eine ganze Zahl ist. Die übrigen wurden durch Hülfe des Taylor'schen Theorems aus diesen berechnet. Wenn der Index oder Modul λ den Zuwachs x erhält, dann ist

$$I_{\lambda+x}^i = I_\lambda^i + \frac{dI_\lambda^i}{d\lambda}\frac{x}{1} + \frac{d^2I_\lambda^i}{d\lambda^2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3I_\lambda^i}{d\lambda^3}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Die im §. IV. angeführten Ausdrücke dieser Transcendenten geben aber leicht

$$\frac{dI_\lambda^i}{d\lambda} = I_\lambda^{i-1} - I_\lambda^{i+1}$$

$$\frac{d^2I_\lambda^i}{d\lambda^2} = I_\lambda^{i-2} - 2I_\lambda^i + I_\lambda^{i+2}$$

$$\frac{d^3I_\lambda^i}{d\lambda^3} = I_\lambda^{i-3} - 3I_\lambda^{i-1} + 3I_\lambda^{i+1} - I_\lambda^{i+3}$$

etc. etc.

woraus man erkennt, dafs die Differentialquotienten dieser Transcendenten nach λ den resp., zwischen je zweiter Transcendente genommenen, endlichen Differenzen nach i gleich sind, wobei zu bemerken ist, dafs, wenn i eine grade Zahl ist,

$$I_\lambda^{-i} = I_\lambda^i$$

und wenn i eine ungrade Zahl ist,

$$I_\lambda^{-i} = -I_\lambda^i$$

ferner, dafs bei den ungraden Differenzordnungen die algebraischen Zeichen umgekehrt werden müssen. Z. B. für $\lambda = 4$

i	I_4^i	$\varDelta$	$\varDelta^{(2)}$	$\varDelta^{(3)}$	$\varDelta^{(4)}$	$\varDelta^{(5)}$	$\varDelta^{(6)}$
−6	+0,3375760						
		−0,4429335					
−4	−0,1053575		+0,4352993				
		−0,0076342		−0,1430226			
−2	−0,1129917		+0,2922767		−0,718539		
		+0,2846425		−0,8615617		+2,441662	
0	+0,1716508		−0,5692850		+1,723123		−4,883324
		−0,2846425		+0,8615617		−2,441662	
2	−0,1129917		+0,2922767		−0,718539		
		+0,0076342		+0,1430226			
4	−0,1053575		+0,4352993				
		+0,4429335					
6	+0,3375760						

Hieraus bekommen wir unmittelbar

$$\frac{dI_4^1}{d\lambda} = +0,2846425 \qquad \frac{d^2 I_4^0}{d\lambda^2} = -0,5692850$$

$$\frac{d^3 I_4^1}{d\lambda^3} = -0,8615617 \qquad \frac{d^4 I_4^0}{d\lambda^4} = +1,723123$$

$$\frac{d^5 I_4^1}{d\lambda^5} = +2,441662 \qquad \frac{d^6 I_4^0}{d\lambda^6} = -4,883324$$

etc. etc.

ferner

i	I_4^i	Δ	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$	$\Delta^{(5)}$
−5	−0,1857748					
		+0,4769071				
−3	+0,2911323		−1,0026757			
		−0,5257686		+1,997717		
−1	−0,2346363		+0,9950412		−3,987799	
		+0,4692726		−1,990082		+7,975598
1	+0,2346363		−0,9950412		+3,987799	
		−0,5257686		+1,907717		
3	−0,2911323		+1,0026757			
		+0,4769071				
5	+0,1857748					

Hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$\frac{dI_4^0}{d\lambda} = -0{,}4692726 \qquad \frac{d^2 I_4^1}{d\lambda^2} = -0{,}9950412$$

$$\frac{d^3 I_4^0}{d\lambda^3} = +1{,}990082 \qquad \frac{d^4 I_4^1}{d\lambda^4} = +3{,}987799$$

$$\frac{d^5 I_4^0}{d\lambda^5} = -7{,}975598$$

etc. etc.

Die Transcendenten, welche den Anfang und das Ende jeder Abtheilung der zweiten Tafel bilden, sind durch die aufsteigenden Reihen, die hier fast schon von ihren ersten Gliedern an convergiren, und durch die Bedingungsgleichung zwischen je drei auf einander folgenden Transcendenten berechnet worden. Die übrigen Transcendenten dieser Tafel sind durch das Taylor'sche Theorem eingeschaltet worden.

Die mit a, b und c überschriebenen Columnen geben den ersten, zweiten und dritten, beziehungsweise mit 1, 2 und 6 dividirten, und auf das Increment der Argumente der Tafeln als Einheit reducirten Differentialquotienten der nebenstehenden Transcendente. Wenn man daher für $\lambda = z$ diese Transcendenten zu berechnen hat, und α der z am nächsten in der Tafel vorkommende Werth von λ ist, dann hat man, wenn man das Increment der Tafel h nennt,

$$I_z^i = I_\alpha^i + a\frac{z-\alpha}{h} + b\left(\frac{z-\alpha}{h}\right)^2 + c\left(\frac{z-\alpha}{h}\right)^3$$

oder, welches für die Rechnung etwas kürzer ist,

$$I_z^i = I_\alpha^i + [a + (b + cy)y]\,y$$

wo y für $\frac{z-\alpha}{h}$ geschrieben ist.

Tafel I.

λ	I_λ^0	a	b	c	I_λ^1	a	b	c
0,00	1	0	−2500	0	0	+50000	0	−62
0,05	0,997502	− 4994	2491	+ 6	0,049938	49813	− 187	62
0,10	0,990025	9950	2463	12	0,099501	49252	373	61
0,15	0,977626	14832	2416	18	0,148319	48323	556	60
0,20	0,960398	19603	2352	24	0,196027	47033	733	58
0,25	0,938470	24227	2270	30	0,242268	45393	905	56
0,30	0,912005	28670	2171	36	0,286701	43417	1070	53
0,35	0,881201	32900	2056	41	0,328996	41121	1225	50
0,40	0,846287	36884	1926	46	0,368842	38523	1370	47
0,45	0,807524	40595	1782	50	0,405950	35647	1504	43
0,50	0,765198	44005	1626	54	0,440051	32515	1626	38
0,55	0,719622	47090	1458	58	0,470902	29153	1734	34
0,60	0,671133	49829	1279	61	0,498289	25589	1828	29
0,65	0,620086	52202	1093	63	0,522023	21853	1906	24
0,70	0,566855	54195	899	65	0,541948	17975	1969	18
0,75	0,511828	55794	699	67	0,557937	13987	2016	13
0,80	0,455402	56990	496	68	0,569896	9922	2046	7
0,85	0,397985	57776	291	69	0,577765	5812	2060	− 2
0,90	0,339986	58152	− 85	68	0,581517	+ 1692	2057	+ 4
0,95	0,281819	58116	+ 120	68	0,581157	− 2405	2038	9
1,00	0,223891	57672	322	67	0,576725	6447	2002	14
1,05	0,166607	56829	520	65	0,568292	10401	1950	19
1,10	0,110362	55596	712	63	0,555963	14235	1882	25
1,15	0,055540	53987	896	60	0,539873	17919	1800	30
1,20	+0,002508	52018	1071	57	0,520185	21424	1703	34
1,25	−0,048384	49709	1236	53	0,497094	24722	1593	38
1,30	0,096805	47082	1389	49	0,470818	27789	1471	42
1,35	0,142449	44160	1530	45	0,441601	30601	1339	46
1,40	0,185036	40971	1657	40	0,409709	33136	1196	49
1,45	0,224312	37543	1769	35	0,375427	35377	1044	52
1,50	0,260052	33906	1866	29	0,339059	37307	885	54
1,55	0,292064	30092	1946	24	0,300921	38914	720	56
1,60	0,320188	26134	2009	18	0,261343	40186	551	57
1,65	0,344296	22066	2056	13	0,220663	41116	379	58
1,70	0,364296	17923	2085	7	0,179226	41701	205	58
1,75	0,380128	13738	2097	+ 1	0,137378	41938	− 32	58
1,80	0,391769	9547	2091	− 5	0,095466	41829	+ 141	57
1,85	0,399230	5383	2069	10	0,053834	41378	310	56
1,90	0,402556	− 1282	2030	16	+ 0,012821	40593	474	54
1,95	0,401826	+ 2724	1974	21	− 0,027244	39484	634	52

Tafel I.

λ	I^0_λ	a	b	c	I^1_λ	a	b	c
2,00	−0,397150	+ 6604	+1903	−26	− 0,066043	−38064	+ 786	+49
2,05	0,388670	10327	1817	31	0,103273	36348	929	46
2,10	0,376557	13865	1718	35	0,138647	34354	1063	43
2,15	0,361011	17190	1605	39	0,171897	32103	1186	38
2,20	0,342257	20277	1481	43	0,202776	29617	1298	34
2,25	0,320543	23106	1346	47	0,231061	26920	1397	31
2,30	0,296138	25655	1202	49	0,256553	24037	1483	26
2,35	0,269331	27908	1050	52	0,279081	20995	1556	22
2,40	0,240425	29850	891	54	0,298500	17824	1613	17
2,45	0,209738	31469	728	55	0,314695	14552	1656	12
2,50	0,177597	32758	560	56	0,327579	11208	1685	7
2,55	0,144335	33710	391	56	0,337097	7824	1697	+ 2
2,60	0,110290	34322	221	56	0,343223	4429	1695	− 3
2,65	0,075803	34596	+ 53	56	0,345961	− 1053	1678	8
2,70	0,041210	34534	− 114	55	0,345345	+ 2274	1646	13
2,75	−0,006844	34144	276	53	0,341438	5524	1601	18
2,80	+0,026971	33433	433	51	0,334333	8667	1541	22
2,85	0,059920	32415	584	49	0,324148	11679	1468	26
2,90	0,091703	31103	727	46	0,311028	14533	1384	30
2,95	0,122033	29514	860	43	0,295143	17206	1288	34
3,00	0,150645	27668	984	39	0,276684	19676	1181	37
3,05	0,177291	25586	1096	35	0,255865	21924	1065	40
3,10	0,201747	23292	1197	31	0,232917	23931	941	42
3,15	0,223812	20809	1284	27	0,208087	25684	810	44
3,20	0,243311	18164	1358	22	0,181638	27169	674	46
3,25	0,260095	15384	1419	18	0,153841	28376	533	47
3,30	0,274043	12498	1465	13	0,124980	29298	388	48
3,35	0,285065	9534	1497	8	0,095342	29929	243	49
3,40	0,293096	6522	1513	− 3	0,065219	30269	+ 96	49
3,45	0,298102	3490	1516	+ 2	0,034902	30316	− 49	48
3,50	0,300079	+ 468	1504	6	− 0,004683	30075	192	47
3,55	0,299051	− 2515	1478	11	+ 0,025153	29551	331	46
3,60	0,295071	5433	1438	15	0,054327	28753	466	44
3,65	0,288217	8257	1384	20	0,082571	27691	595	42
3,70	0,278596	10962	1319	24	0,109625	26378	716	39
3,75	0,266340	13525	1242	28	0,135248	24830	830	36
3,80	0,251602	15921	1153	31	0,159214	23065	934	33
3,85	0,234559	18131	1055	34	0,181313	21101	1028	30
3,90	0,215408	20136	948	37	0,201357	18959	1112	26
3,95	0,194362	21918	833	39	0,219179	16662	1184	22

Tafel I.

λ	I^0_λ	a	b	c	I^1_λ	a	b	c
4,00	+0,171651	−23464	− 712	+41	+ 0,234636	+14232	−1244	−18
4,05	0,147518	24761	585	43	0,247607	11695	1291	14
4,10	0,122216	25800	454	44	0,257998	9075	1326	9
4,15	0,096006	26574	320	45	0,265739	6399	1348	5
4,20	0,069158	27079	185	45	0,270786	3692	1357	− 1
4,25	0,041939	27312	− 49	45	0,273121	+ 981	1352	+ 4
4,30	+0,014623	27275	+ 86	44	0,272754	− 1709	1335	8
4,35	−0,012523	26972	218	43	0,269719	4352	1306	12
4,40	0,039234	26407	346	42	0,264073	6924	1264	16
4,45	0,065253	25590	470	40	0,255902	9401	1211	20
4,50	0,090334	24531	588	38	0,245312	11759	1146	23
4,55	0,114239	23243	699	36	0,232430	13978	1071	26
4,60	0,136748	21741	802	33	0,217408	16038	987	30
4,65	0,157655	20041	896	30	0,200414	17921	894	32
4,70	0,176772	18163	980	26	0,181632	19609	794	34
4,75	0,193929	16126	1055	23	0,161264	21090	686	36
4,80	0,208979	13953	1118	19	0,139525	22351	574	38
4,85	0,221796	11664	1169	15	0,116639	23382	456	39
4,90	0,232276	9284	1209	11	0,092840	24175	336	40
4,95	0,240341	6837	1236	7	0,068370	24725	213	41
5,00	0,245936	4347	1251	+ 3	0,043473	25028	− 90	41
5,05	0,249030	− 1840	1254	− 1	+ 0,018396	25085	+ 33	41
5,10	0,249617	+ 661	1245	5	− 0,006616	24897	155	40
5,15	0,247717	3132	1223	9	0,031318	24468	274	39
5,20	0,243372	5547	1191	13	0,055473	23804	389	37
5,25	0,236648	7885	1146	17	0,078850	22914	500	36
5,30	0,227635	10123	1090	20	0,101229	21808	605	34
5,35	0,216443	12240	1025	23	0,122399	20500	702	31
5,40	0,203202	14217	950	26	0,142166	19004	793	29
5,45	0,188062	16035	867	29	0,160350	17335	875	26
5,50	0,171190	17679	776	32	0,176785	15512	947	23
5,55	0,152768	19133	678	34	0,191328	13553	1010	19
5,60	0,132992	20385	574	35	0,203853	11479	1062	16
5,65	0,112069	21426	466	37	0,214255	9311	1104	12
5,70	0,090215	22245	353	38	0,222450	7070	1135	8
5,75	0,067654	22838	239	38	0,228379	4780	1154	4
5,80	0,044616	23200	123	39	0,232000	2462	1162	+ 1
5,85	−0,021332	23330	+ 7	39	0,233300	− 139	1159	− 3
5,90	+0,001967	23228	− 108	38	0,232285	+ 2165	1144	7
5,95	0,025049	22898	221	37	0,228983	4429	1118	10

Tafel I.

λ	I^0_λ	a	b	c	I^1_λ	a	b	c
6,00	+0,047689	+22345	− 332	−36	− 0,223447	+ 6631	+1082	−14
6,05	0,069667	21575	437	34	0,215749	8750	1035	17
6,10	0,090770	20598	538	32	0,205982	10765	979	20
6,15	0,110798	19426	633	30	0,194259	12659	913	23
6,20	0,129561	18071	721	28	0,180710	14413	839	26
6,25	0,146884	16548	801	25	0,165484	16012	758	28
6,30	0,162607	14874	872	22	0,148742	17441	670	30
6,35	0,176588	13066	934	19	0,130662	18688	576	32
6,40	0,188701	11143	987	16	0,111432	19741	477	34
6,45	0,198843	9125	1030	12	0,091248	20592	374	35
6,50	0,206926	7032	1062	9	0,070318	21234	268	36
6,55	0,212888	4885	1083	5	0,048853	21662	160	36
6,60	0,216686	2707	1094	− 2	0,027067	21874	+ 52	36
6,65	0,218298	+ 518	1094	+ 2	− 0,005177	21869	− 57	36
6,70	0,217725	− 1660	1083	5	+ 0,016599	21649	163	35
6,75	0,214989	3805	1061	9	0,038049	21217	268	34
6,80	0,210133	5896	1029	12	0,058965	20580	369	33
6,85	0,203221	7914	987	15	0,079143	19744	466	31
6,90	0,194336	9839	936	18	0,098391	18721	557	29
6,95	0,183580	11653	876	21	0,116525	17520	643	27
7,00	0,171073	13338	808	24	0,133375	16155	721	25
7,05	0,156953	14878	732	26	0,148784	14640	792	22
7,10	0,141369	16261	650	28	0,162611	12992	855	19
7,15	0,124488	17473	561	30	0,174729	11227	909	16
7,20	0,106484	18503	468	32	0,185032	9363	953	13
7,25	0,087545	19343	371	33	0,193429	7421	988	10
7,30	0,067864	19985	271	34	0,199853	5418	1013	6
7,35	0,047642	20425	169	34	0,204251	3375	1028	− 3
7,40	0,027082	20659	− 66	34	0,206596	+ 1312	1033	0
7,45	+0,006392	20688	+ 37	34	0,206876	− 749	1027	+ 3
7,50	−0,014224	20510	139	34	0,205104	2790	1012	7
7,55	0,034462	20131	239	33	0,201310	4789	986	10
7,60	0,054421	19555	336	32	0,195545	6729	951	13
7,65	0,073608	18788	429	30	0,187879	8589	907	16
7,70	0,091936	17840	518	28	0,178400	10352	855	19
7,75	0,109231	6721	600	26	0,167213	12002	794	21
7,80	0,125326	15444	676	24	0,154440	13523	726	24
7,85	0,140070	14022	745	22	0,140216	14900	651	26
7,90	0,153326	12469	806	19	0,124691	16122	570	28
7,95	0,164971	10803	859	16	0,108028	17177	484	29

Tafel I.

λ	I_λ^0	a	b	c	I_λ^1	a	b	c
8,00	−0,174899	− 9040	+ 903	+13	+ 0,090397	−18055	− 394	+31
8,05	0,183024	7198	937	10	0,071979	18749	300	32
8,10	0,189275	5296	963	7	0,052962	19254	204	32
8,15	0,193603	3354	978	+ 4	0,033535	19566	107	32
8,20	0,195975	− 1389	984	0	+ 0,013895	19682	− 9	33
8,25	0,196381	+ 577	980	− 3	− 0,005764	19603	+ 88	32
8,30	0,194828	2525	966	6	0,025247	19331	184	32
8,35	0,191344	4436	943	9	0,044362	18869	278	31
8,40	0,185974	6292	911	12	0,062923	18223	368	29
8,45	0,178783	8075	870	15	0,080749	17401	454	28
8,50	0,169854	9767	821	18	0,097669	16411	535	26
8,55	0,159285	11352	763	20	0,113519	15265	610	24
8,60	0,147191	12815	699	23	0,128150	13974	679	22
8,65	0,133701	14142	628	25	0,141423	12553	741	19
8,70	0,118956	15322	551	26	0,153216	11015	795	17
8,75	0,103110	16342	469	28	0,163420	9377	841	14
8,80	0,086328	17194	383	29	0,171943	7656	879	11
8,85	0,068780	17871	293	30	0,178710	5868	907	8
8,90	0,050646	18366	202	31	0,183663	4033	927	5
8,95	0,032109	18677	108	31	0,186765	2168	937	+ 2
9,00	−0,013356	18799	+ 15	31	0,187995	− 291	938	− 1
9,05	+0,005427	18735	− 79	31	0,187350	+ 1578	930	4
9,10	0,024052	18485	171	30	0,184848	3421	912	7
9,15	0,042336	18052	261	29	0,180523	5220	886	10
9,20	0,060098	17443	348	28	0,174428	6958	851	13
9,25	0,077165	16663	431	27	0,166634	8617	808	16
9,30	0,093371	15722	509	25	0,157225	10182	757	18
9,35	0,108560	14630	582	23	0,146305	11638	698	20
9,40	0,122585	13399	649	21	0,133990	12971	634	22
9,45	0,135315	12041	708	19	0,120408	14169	563	24
9,50	0,146630	10570	761	16	0,105702	15219	487	26
9,55	0,156423	9002	806	14	0,090022	16114	407	27
9,60	0,164607	7353	842	11	0,073529	16844	323	28
9,65	0,171107	5639	870	8	0,056391	17403	236	29
9,70	0,175869	3878	889	5	0,038782	17787	148	29
9,75	0,178854	2088	900	− 2	0,020877	17992	+ 58	30
9,80	0,180041	+ 286	901	+ 1	− 0,002857	18019	− 32	30
9,85	0,179427	− 1510	893	4	+ 0,015101	17866	121	29
9,90	0,177029	3282	877	7	0,032817	17537	208	29
9,95	0,172878	5012	852	10	0,050117	17036	293	28
10,00	+0,167025	− 6683	− 818	+12	+ 0,066833	+16368	− 374	−26

Tafel II.

λ	I_λ^5	a	b	c	λ	I_λ^6	a	b	c
0,0	0,0000000	0	0	0	0,0	0,0000000	0	0	0
0,1	0,0000001	+ 1	+ 8	+ 12	0,1	0,0000000	0	0	+ 1
0,2	0,0000026	65	66	36	0,2	0,0000001	+ 2	+ 3	3
0,3	0,0000199	330	218	74	0,3	0,0000010	19	17	8
0,4	0,0000831	1027	504	123	0,4	0,0000056	82	50	18
0,5	0,0002498	2456	953	180	0,5	0,0000209	247	122	33
0,6	0,0006101	4961	1584	241	0,6	0,0000615	604	245	53
0,7	0,0012901	8910	2397	299	0,7	0,0001523	1275	438	79
0,8	0,0024523	14663	3384	352	0,8	0,0003321	2414	717	110
0,9	0,0042937	22540	4514	394	0,9	0,0006569	4207	1095	144
1,0	0,0070396	32793	5752	423	1,0	0,0012024	6865	1581	182

λ	I^8	a	b	c	λ	I^9	a	b	c
1,0	0,0000222	+ 174	+ 58	+ 8	1,0	0,0000025	+ 22	+ 9	+ 1
1,1	0,0000464	327	99	16	1,1	0,0000058	46	15	3
1,2	0,0000908	580	159	25	1,2	0,0000123	89	28	5
1,3	0,0001674	980	246	34	1,3	0,0000246	164	48	8
1,4	0,0002937	1584	364	46	1,4	0,0000467	287	77	12
1,5	0,0004934	2463	522	60	1,5	0,0000844	481	119	17
1,6	0,0007983	3699	721	75	1,6	0,0001462	774	177	23
1,7	0,0012483	5386	974	93	1,7	0,0002438	1205	258	31
1,8	0,0018940	7631	1280	111	1,8	0,0003934	1821	362	40
1,9	0,0027967	10544	1642	130	1,9	0,0006160	2675	497	51
2,0	0,0040287	14237	2061	149	2,0	0,0009386	3834	667	62

λ	I_λ^{11}	a	b	c	λ	I_λ^{12}	a	b	c
2,0	0,0000366	+ 189	+ 43	+ 3	2,0	0,0000062	+ 36	+ 9	+ 2
2,1	0,0000604	296	64	7	2,1	0,0000109	59	14	2
2,2	0,0000972	449	91	11	2,2	0,0000184	94	22	3
2,3	0,0001524	668	129	15	2,3	0,0000303	147	33	4
2,4	0,0002337	974	178	19	2,4	0,0000486	224	47	6
2,5	0,0003509	1392	242	24	2,5	0,0000763	335	65	8
2,6	0,0005168	1952	321	30	2,6	0,0001172	492	92	10
2,7	0,0007473	2691	421	37	2,7	0,0001767	709	126	13
2,8	0,0010623	3650	542	45	2,8	0,0002616	1003	170	17
2,9	0,0014861	4876	688	53	2,9	0,0003807	1397	226	21
3,0	0,0020480	6419	860	61	3,0	0,0005452	1915	295	25

Tafel II.

λ	I_λ^{13}	a	b	c	λ	I_λ^{14}	a	b	c
3,0	0,0001327	+ 515	+ 89	+ 7	3,0	0,0000297	+ 127	+ 24	+ 3
3,1	0,0001941	725	121	11	3,1	0,0000451	185	34	4
3,2	0,0002798	1002	159	15	3,2	0,0000674	265	47	5
3,3	0,0003974	1367	208	19	3,3	0,0000991	375	64	6
3,4	0,0005569	1842	268	23	3,4	0,0001436	522	85	8
3,5	0,0007702	2450	343	27	3,5	0,0002052	720	114	10
3,6	0,0010523	3221	431	32	3,6	0,0002896	979	148	13
3,7	0,0014209	4185	536	38	3,7	0,0004035	1314	191	16
3,8	0,0018970	5379	661	45	3,8	0,0005557	1747	243	19
3,9	0,0025055	6839	803	51	3,9	0,0007567	2295	307	23
4,0	0,0032749	8604	967	58	4,0	0,0010193	2982	383	28

λ	I_λ^{15}	a	b	c	λ	I_λ^{16}	a	b	c
4,0	0,0002926	+ 941	+ 135	+ 11	4,0	0,0000780	+ 273	+ 43	+ 4
4,1	0,0004015	1248	173	14	4,1	0,0001101	373	57	5
4,2	0,0005451	1639	219	17	4,2	0,0001537	504	75	7
4,3	0,0007327	2131	275	20	4,3	0,0002123	675	97	8
4,4	0,0009754	2744	340	24	4,4	0,0002904	895	123	10
4,5	0,0012864	3501	418	28	4,5	0,0003933	1174	157	12
4,6	0,0016813	4427	510	33	4,6	0,0005277	1527	197	15
4,7	0,0021784	5550	615	37	4,7	0,0007017	1968	245	18
4,8	0,0027987	6896	734	43	4,8	0,0009248	2514	303	21
4,9	0,0035661	8497	871	49	4,9	0,0012087	3185	370	24
5,0	0,0045080	10390	1023	56	5,0	0,0015668	4002	449	27

λ	λ_λ^{18}	a	b	c	λ	λ_λ^{19}	a	b	c
5,0	0,0001524	+ 463	+ 64	+ 5	5,0	0,0000431	+ 141	+ 21	+ 2
5,1	0,0002056	606	81	6	5,1	0,0000596	189	27	3
5,2	0,0002750	789	103	8	5,2	0,0000815	252	36	3
5,3	0,0003650	1019	128	9	5,3	0,0001106	333	46	4
5,4	0,0004806	1304	159	11	5,4	0,0001489	437	58	5
5,5	0,0006281	1658	195	13	5,5	0,0001990	569	73	6
5,6	0,0008148	2091	239	16	5,6	0,0002638	734	93	7
5,7	0,0010494	2619	291	19	5,7	0,0003472	942	116	8
5,8	0,0013423	3259	350	21	5,8	0,0004538	1199	142	10
5,9	0,0017054	4026	418	24	5,9	0,0005889	1514	175	12
6,0	0,0021522	4939	497	27	6,0	0,0007590	1901	213	14

Tafel II.

λ	I_λ^{20}	a	b	c	λ	I_λ^{21}	a	b	c
6,0	0,0002512	+ 681	+ 84	+ 7	6,0	0,0000784	+ 228	+ 30	+ 2
6,1	0,0003283	867	103	8	6,1	0,0001045	297	39	3
6,2	0,0004261	1098	128	9	6,2	0,0001384	384	48	4
6,3	0,0005496	1381	156	10	6,3	0,0001820	492	61	5
6,4	0,0007044	1725	189	12	6,4	0,0002378	628	75	6
6,5	0,0008971	2143	230	14	6,5	0,0003087	796	94	6
6,6	0,0011358	2645	274	16	6,6	0,0003984	1004	115	8
6,7	0,0014294	3245	327	19	6,7	0,0005111	1257	139	9
6,8	0,0017885	3957	386	22	6,8	0,0006517	1564	169	11
6,9	0,0022250	4796	455	25	6,9	0,0008261	1935	204	13
7,0	0,0027527	5782	532	28	7,0	0,0010413	2381	243	15

λ	I_λ^{23}	a	b	c	λ	I_λ^{24}	a	b	c
7,0	0,0001252	+ 331	+ 40	+ 3	7,0	0,0000402	+ 113	+ 15	+ 1
7,1	0,0001626	420	50	4	7,1	0,0000531	146	18	2
7,2	0,0002100	532	62	4	7,2	0,0000697	188	23	2
7,3	0,0002698	669	75	5	7,3	0,0000910	240	29	2
7,4	0,0003447	834	91	6	7,4	0,0001182	306	36	3
7,5	0,0004379	1037	112	7	7,5	0,0001527	387	45	3
7,6	0,0005536	1283	134	8	7,6	0,0001963	488	55	4
7,7	0,0006962	1577	161	10	7,7	0,0002510	610	67	5
7,8	0,0008710	1929	192	11	7,8	0,0003192	760	82	5
7,9	0,0010843	2349	228	13	7,9	0,0004040	942	99	6
8,0	0,0013433	2845	269	15	8,0	0,0005087	1160	120	6

λ	I_λ^{25}	a	b	c	λ	I_λ^{26}	a	b	c
8,0	0,0001828	+ 446	+ 50	+ 3	8,0	0,0000625	+ 162	+ 20	+ 1
8,1	0,0002328	557	61	4	8,1	0,0000808	206	24	2
8,2	0,0002950	691	73	5	8,2	0,0001040	260	30	2
8,3	0,0003719	853	90	6	8,3	0,0001332	326	37	3
8,4	0,0004668	1050	107	6	8,4	0,0001698	408	45	3
8,5	0,0005832	1284	128	7	8,5	0,0002154	507	55	4
8,6	0,0007252	1564	152	9	8,6	0,0002720	628	66	4
8,7	0,0008977	1896	181	10	8,7	0,0003419	774	80	5
8,8	0,0011064	2288	212	11	8,8	0,0004278	949	95	6
8,9	0,0013575	2747	249	13	8,9	0,0005328	1158	115	7
9,0	0,0016585	3286	290	15	9,0	0,0006608	1408	136	8

Tafel II.

λ	I_{λ}^{27}	a	b	c	λ	I_{λ}^{28}	a	b	c
9,0	0,0002505	+ 570	+ 59	+ 4	9,0	0,0000906	+ 219	+ 24	+ 1
9,1	0,0003138	701	72	4	9,1	0,0001151	274	30	1
9,2	0,0003915	858	86	5	9,2	0,0001457	340	36	2
9,3	0,0004864	1045	102	6	9,3	0,0001835	420	44	3
9,4	0,0006017	1268	121	7	9,4	0,0002302	518	54	3
9,5	0,0007413	1531	143	8	9,5	0,0002877	635	64	4
9,6	0,0009095	1842	169	9	9,6	0,0003580	775	76	5
9,7	0,0011115	2207	197	10	9,7	0,0004436	942	91	5
9,8	0,0013529	2632	229	11	9,8	0,0005475	1141	108	6
9,9	0,0016402	3127	267	13	9,9	0,0006731	1377	128	7
10,0	0,0019809	3700	307	15	10,0	0,0008243	1654	150	8

Berichtigungen.

Seite 5	Zeile	14 v. u.	statt:	den	lies:	des
- 5	-	12 v. u.	-	Gliede	-	Gliedes
- 28	-	15 v. o.	-	$\frac{(1)}{(2)} + \frac{(3)}{(4)}$	-	$\frac{(1)}{(4)} + \frac{(3)}{(4)}$
- 31	-	16 v. o.	-	$\pm$ etc.	-	$\mp$ etc.
- 33	-	5 v. u.	-	$-\frac{1}{4}c^3$	-	$+\frac{1}{4}c^3$
- 55	in der Ueberschrift des Täfelchens		-	f	-	f'
- 86	Zeile	12 v. o.	-	$+0{,}063$	-	$+0{,}064$
- 89	-	12 v. o.	-	i	-	i'
- 119	-	8 v. o.	-	v und u	-	v in u
- 123	-	14 v. u.	-	v und u	-	v in u
- 143	-	12 v. u.	-	A	-	A'